Math. P.
490 Sc

Salmon

IEN

DR.

DRUCK U

DR. WILHELM

Bibliothek
Manuskripten

LEIPZIG

DRUCK UND VERLAG VO

1863.

menten an bis z
die Mathematiker
für eine Trennung
entschieden, deren
des insbesondere e
der algebraischen
Umfange gewidme
keit des Buches n
grossen Umfangs
Jahres erschien in

Durch Verme
Elementen, durch
Punktcoordinaten
ihres Gebrauchs,
rien, wie der von

geradlinigen Schnit

VORWORT.

Der analytischen Geometrie der Kegelschnitte und den Vorlesungen zur Einführung in die Algebra der linearen Transformationen von George Salmon lasse ich hier von der analytischen Geometrie des Raumes den ersten Theil in deutscher Bearbeitung folgen.

Das Werk „A Treatise on the Analytic Geometry of three Dimensions“ meines verehrten Freundes Rev. George Salmon ist ein Buch von bedeutendem Umfange, es umfasst die analytische Geometrie des Raumes von den Elementen an bis zu der Untersuchung der Probleme, welche die Mathematiker der Gegenwart beschäftigen. Ich habe mich für eine Trennung des umfangreichen Materials in zwei Theile entschieden, deren einer die Theorie der Flächen zweiten Grades insbesondere enthält, indess der andere der Untersuchung der algebraischen Flächen und der Raumcurven im ganzen Umfange gewidmet ist, und ich hoffe dadurch die Wirksamkeit des Buches noch erleichtert zu haben, das trotz seines grossen Umfangs und obwohl es erst im Sommer vorigen Jahres erschien in England bereits fast vergriffen ist.

Durch Vermehrung der Beispiele namentlich in den Elementen, durch die Gegenüberstellung der Systeme von Punktcoordinaten und Ebenencoordinaten und die Darlegung ihres Gebrauchs, durch weitere Ausführung einiger Theorien, wie der von den ebenen Schnitten insbesondere den geradlinigen Schnitten, und von den sich selbst conjugierten

Tetraedern oder den Systemen harmonischer Pole und Polarebenen der Flächen zweiten Grades, etc. habe ich diesen ersten Theil des Werkes zu einem Lehrbuch für höhere Unterrichtsanstalten vollkommener geeignet zu machen gesucht. Ich hoffe, dass es als ein solches dazu brauchbar erscheint, in die gegenwärtige wissenschaftliche Auffassung der analytischen Geometrie des Raumes einzuführen, d. h. zur Aneignung der wichtigen Errungenschaften der letzten Epoche in diesem Theile der mathematischen Arbeit hin zu leiten. In diesem Sinne habe ich die Theorie der Focalcentra und Focalkugeln in den Artikeln 211 f. und die Untersuchung des Feuerbach'schen Kreises bei sphärischen Dreiecken in den Artikeln 239, 240 hinzugefügt; ich habe es aber nicht für statthaft und nicht für nöthig gehalten, nach systematischer Vollständigkeit zu streben und darf mir in dieser Beziehung wohl erlauben, auf die „Analytische Geometrie der Kegelschnitte mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden“ (Leipzig, B. G. Teubner, 1860) zu verweisen, deren Vergleichung an sehr zahlreichen Stellen zu weiteren Ausführungen anleiten wird.

Die Herausgabe des zweiten Theils der analytischen Geometrie des Raumes soll bald erfolgen, wenn Zeit und Kraft mir dazu werden und die fördernde Theilnahme des mathematischen Publikums mir auch ferner nicht versagt ist.

Chemnitz, im September 1863.

Wilhelm Fiedler.

von einem System rectangulärer A
16. Uebergang von rechtwinkligen zu
17. Durch Coordinatentransformation w
ung zwischen den Coordinaten nic

II. Kapite

Interpretation der

18. Specielle Fälle zur vorläufigen Erl
19. Eine Gleichung zwischen den Coo
Fläche; durch zwei Gleichungen w
eine Gruppe von Punkten dargeste
20. Die Classification der Flächen nac
21. Classification der Curven im Raum
drei Flächen . . . . . .
22. Cylindrische Flächen . . . . .

III. Kapite

Die Ebene und die

23. Jede Gleichung vom ersten Grade re
jede Ebene ist durch eine Gleichung
Bestimmung der Ebene durch die

—

51
53

54
55
56
57

58

59

zwi-
61

die
nten.
eines
en im
62

rades.

n Grades
67

Classificatio

77. Coordinatentransform
78. Die Invarianten der
79. Die Transformation
der cubischen Gleich
80. Die Classification na
der Discriminante; E
81. Das Hyperboloid mit
82. Das Hyperboloid mit
Grenzfläche . . .
83. Die Cylinderflächen,
84. Reduction der Gleich

Ableitung von Eigen
aus speciellen

85. Die Mittelpunktsgleic
Polarebene, Tangente
86. Die Bedingung der B
87. Die Normale und ihre
88. Die Quadratsumme d
liger Durchmesser .
89. Die Quadratsumme de
gentenebenen aus dem

77. Coordinatentransformation nach dem C
78. Die Invarianten der Coordinatentransf
79. Die Transformation zu den Achsen de
der cubischen Gleichung der Discrimi
80. Die Classification nach den Wurzeln d
der Discriminante; Ellipsoid . . .
81. Das Hyperboloid mit einer Mantelfläc
82. Das Hyperboloid mit zwei Mantelfläch
Grenzfläche . . . . . .
83. Die Cylinderflächen, die Paraboloide
84. Reduction der Gleichung eines Parabo

VI. Kapitel.

Ableitung von Eigenschaften der Fl aus speciellen Formen ihrer

85. Die Mittelpunktsgleichung der Fläche
Polarebene, Tangentenebene und Nor
86. Die Bedingung der Berührung einer E
87. Die Normale und ihre Abschnitte .
88. Die Quadratsumme der reciproken W
liger Durchmesser . . . . . .
89. Die Quadratsumme der Normalen drei
gentenebenen aus dem Centrum . .

Artikel.		Seite.
90.	Ein Durchmesser und seine conjugierte Diametralebene . .	110
91.	Die Quadratsumme von drei conjugierten Halbdurchmessern und das Parallelepiped derselben. Relation zwischen sechs Punkten eines Ellipsoids	111
92.	Zusammenhang mit der Theorie der Kegelschnitte	114
93.	Die Quadratsumme der Projectionen dreier conjugierter Durchmesser; der Ort des Durchschnitts der Tangentenebenen in ihren Endpunkten	115
94.	Die Durchschnitte der Flächen zweiten Grades mit Ebenen	116
95.	Der Ort der Centra paralleler Schnitte	117
96.	Die Mittelpunkte der durch denselben Punkt gehenden Sehnen	119
97.	Die Achsenlängen eines ebenen Centralschnittes	120
98.	Durch jeden Radius geht im Allgemeinen ein ebener Schnitt, der ihn zur Achse hat	122
99.	Die Möglichkeit der Kreisschnitte centraler Flächen und ihre Construction	123
100.	Flächen mit denselben Ebenen der Kreisschnitte	125
101.	Zwei Kreisschnitte einer Fläche von verschiedenen Systemen liegen auf einer Kugelfläche	126
102.	Die Kreispunkte und ihre Tangentenebenen	—
103.	Die Kreisschnitte des Paraboloids	127
104.	Die geraden Linien in den Tangentenebenen der Flächen .	128
105.	Die geraden Erzeugenden des Hyperboloids mit einer Mantelfläche	129
106.	Zwei zu verschiedenen Systemen gehörige Gerade des Hyperboloids schneiden sich	131
107.	Jede durch eine Gerade des Hyperboloids gehende Ebene schneidet es in einer zweiten Geraden und berührt es im Schnittpunkt von beiden; die Reihe der Berührungspunkte und das Büschel der Tangentenebenen	134
108.	Die Erzeugenden des Hyperboloids und der Asymptotenkegel	135
109.	Die Entstehung von Flächen durch Bewegung einer Geraden	136
110.	Das Hyperboloid; vier hyperboloidische Gerade	137
111.	Das hyperbolische Paraboloid; jedes Paraboloid wird durch die unendlich entfernte Ebene berührt	143
112.	Vier gerade Linien des einen Systems bestimmen in denen des andern Punktreihen von gleichem Doppelschnittverhältniss. Das Verhältniss der Producte der Abstände von zwei festen Ebenenpaaren und ein Analogon des Pascal'schen Sechsecks	145
113.	Das hyperbolische Paraboloid; die geraden Linien des einen Systems beim hyperbolischen Paraboloid bestimmen in denen des andern Theilungen nach gleichem Verhältniss. Deformation aus der Ebene	148
114.	Bedingungen einer Umdrehungsfläche; aus der Unbestimmtheit der Hauptebenen	151
117.	Beispiele über die Anwendung der analytischen Geometrie zur Untersuchung der geometrischen Oerter	154

VII. Kapitel.

Methoden der abgekürzten Bezeichnung.

118.	Die Theorie der Reciprocität und Collineation	168
119.	Die Raumcurven, ihre Elemente und die reciproken Polaren derselben	169
120.	Das Flächenbüschel zweiten Grades	170

136. Flächen zweiten Grades, welche eine
Kreisschnitte, Directrixen und Focal
selben . . . . . .
137. Existenz der Focalpunkte; die Foca
reciproken Polaren in Bezug auf die
138. Die Flächen zweiten Grades nach der
schnitte; die Focalkegelschnitte mit
nen gehen durch die Kreispunkte d
140. Die Focallinien der Kegelflächen u
Reciprocalkegels . . . . . .
142. Die Focalpunkte der Paraboloide u
143. Die metrischen Eigenschaften der F
calpunkte und Directrixen; der Mod
ten Grades . . . . . .
144. Die Focalpunkte sind Centra der um
der Fläche; Eigenschaften der Foca
145. Flächen zweiten Grades, welche s
Curve berühren; Eigenschaften ihre
146. Die auf ein sich selbst conjugiertes T
zweiten Grades. Das gemeinschaftlich
Tetraeder zweier Flächen und eines
Theorie der conjugierten Durchmess
Hauptachsen als Specialfälle seine
und collineare Lage . . . . . .
147. Die Bedingung, unter welcher eine

Artikel. Seite.

durch die Ecken eines sich selbst conjugierten Tetraeders einer gegebenen Fläche hindurchgeht; die Invarianten des einfachen Systems; die durch ein System harmonischer Pole gehende Kugel 213
148. Ueber Systeme harmonischer Pole und sich selbst conjugierte Tetraeder 216
149. Zwei Systeme harmonischer Pole einer Fläche zweiten Grades liegen auf derselben Fläche zweiten Grades. Polartetraeder und die Verbindungslinien ihrer entsprechenden Ecken 219
151. Pascal's Theorem im Raume 224
152. Die Bedingung, unter welcher von zwei Flächen zweiten Grades die eine zwei Paar Gegenkanten eines Tetraeders enthält, während die andere von seinen Seitenflächen berührt wird . 225
153. Gleichung der einem Tetraeder umgeschriebenen Kugel . . 226
154. Bedingungen unter den Coefficienten der allgemeinen Gleichung für die Kugelfläche 227
155. Die Covarianten zweier Flächen zweiten Grades; Bestimmung des gemeinschaftlichen Systems der harmonischen Pole . . 228
156. Die Bedingung der Berührung einer Ebene mit einer Fläche zweiten Grades als Contravariante 229
157. Die Reciprokalfläche; das System der von einer gemeinschaftlichen developpabeln Fläche umhüllten Flächen 230
158. Die umgeschriebene developpable Fläche zweier Flächen . 231
159. Die Bedingung, unter welcher eine Gerade die Durchschnittscurve zweier Flächen zweiten Grades schneidet 232
160. Die developpable Fläche der Tangenten dieser Durchschnittscurve; ihre Doppelcurven 234
161. Theorie der Reciprokalflächen; die Reciproke einer Regelfläche ist eine Regelfläche von demselben Grade; die Reciproke einer Fläche zweiten Grades in Bezug auf einen Focalpunkt ist eine Umdrehungsfläche 236
162. Die Reciproke einer centrischen Fläche für einen beliebigen Punkt 237
163. Die Reciproke einer Kugel ist eine Umdrehungsfläche um die transversale Achse; Eigenschaften solcher Flächen aus denen der Kugel . . . . . —
164. Die Reciproke einer Fläche zweiten Grades in Bezug auf einen Punkt des durch die Kreispunkte gehenden Focalkegelschnittes ist eine Umdrehungsfläche um die transversale Achse; Eigenschaften der ersten aus denen der letzteren 239

VIII. Kapitel.

Confocale Flächen zweiten Grades.

165. Die gemeinschaftlichen Brennpunkte confocaler Kegelschnitte 243
166. Die Focalkegelschnitte confocaler Flächen als Grenzflächen des Systems 244
167. Die drei durch einen Punkt gehenden Flächen, die einer gegebenen confocal sind 246
168. Die cubische Gleichung der primären Achsen confocaler Flächen durch einen Punkt 247
169. Der Radius vector des Schnittpunktes confocaler Flächen in Function der Achsen 248
170. Confocale Flächen durchschneiden einander rechtwinklig . 249
171. Die Achsen eines Centralschnittes sind den Normalen der

und die Transformation der Gleich
190. Drei zu einander rechtwinklige Ta
confocalen Flächen schneiden sich
191. Concentrische Tangentenkegel conf
192. Ableitung der Achsen einer central
gebenen System conjugierter Durch
194. Gerade Tangentenkegel einer Fläch
prokal- und Umdrehungs-Flächen
195. Beispiele . . . . . .
196. Correspondierende Punkte confocale
197. Elliptische Coordinaten . . . .
198. Wenn zwei Flächen zweiten Grades
schnitte haben, so hat jede durch i
Fläche zweiten Grades dieselben K
199. Das Theorem von Jvory . . .
200. Jacobi's Generation der Flächen zw
calkegelschnitte . . . . . .
202. Ort der Berührungspunkte parallele
Confocalen . . . . . .
203. Confocale und concyclische Flächen
204. Krümmungsradien der normalen un
einer Fläche zweiten Grades . . .
206. Die Hauptkrümmungsradien und Haup
Punktes . . . . . .
207. Die Hauptkrümmungscentra als Pole
Bezug auf die entsprechenden Conf

Artikel.		Seite.
208.	Die Fläche der Hauptkrümmungscentra	288
209.	Ihre Durchschnitte mit den Hauptebenen	289
210.	Ihre Reciprokalfläche	290
211.	Die Hauptnormalebenen eines Punktes einer Fläche zweiten Grades bestimmen in den Achsen Punkte involutorischer Systeme, deren Doppelpunkte den Normalen der Kreispunkte angehören; Focalcentra	291
213.	Die harmonischen Büschel der Hauptnormalebenen und der durch die Focalcentra gehenden; Focalkugeln	295
214.	Die Directorebenen der Focalcentra und die Focalstrahlen .	297
216.	Die Krümmungslinien der Flächen zweiten Grades; der Joachimsthal'sche Satz	301
218.	Das Vierseit und das Parallelepiped der Krümmungslinien und das Theorem von Jvory	308

IX. Kapitel.

Kegel und sphärische Kegelschnitte.

219.	Kegelflächen und sphärische Curven	310
220.	Sphärische Coordinatensysteme	311
221.	Princip der Interpretation der Gleichungen der Kegelflächen als solcher von sphärischen Linien	312
222.	Sphärische Dreiecke	313
223.	Bedingung der Orthogonalität grösster Kreise	315
224.	Vom sphärischen Vierseit. Sphärische Kegelschnitte, aus zwei Tangenten und der Berührungssehne, oder durch vier Punkte	—
225.	Die cyclischen Bogen als Asymptoten. Der Reciprocalkegel und die Reciprocität der Theoreme in der Sphärik . . .	317
228.	Brennpunkte sphärischer Kegelschnitte; Directrixen . . .	319
231.	Eigenschaften allgemeiner Flächen zweiten Grades aus denen der Kegelflächen	322
232.	Concyclische und confocale sphärische Kegelschnitte . . .	324
235.	Identische Relation zwischen den von einem Punkte auf drei feste grösste Kreise gefällten Normalen	326
236.	Gleichung der einem Tetraeder eingeschriebenen Kugel . .	327
237.	Kleine Kugelkreise und die Theorie der Invarianten . . .	328
239.	Die vier eingeschriebenen Kreise eines sphärischen Dreiecks werden von dem nämlichen fünften Kreise berührt . . .	330

I. Kapitel.

Der Punkt; Theorie der Projectionen und Transformation der Coordinaten.

---

1. Wie die Lage eines Punktes C in einer Ebene bestimmt wird, indem man ihn auf zwei in dieser Ebene gelegene Coordinatenachsen OX, OY bezieht, ist bekannt. Um die Lage eines Punktes P im Raume zu bestimmen, haben wir nun eine dritte Achse OZ zu den beiden schon vorhandenen hinzuzufügen, welche nicht in ihrer Ebene liegt. Wenn wir dann die der Linie OZ parallel gemessene Entfernung des Punktes P von der Ebene XOY und die x und y Coordinaten des Punktes C kennen, in welchem die durch P gehende Parallele zu OZ die Ebene schneidet, so ist die Lage des Punktes P offenbar vollständig bestimmt.

Von den drei gegebenen Gleichungen

$$x = a,\ y = b,\ z = c$$

bestimmen die beiden ersten den Punkt C und man erhält den Punkt P, indem man durch ihn eine Parallele zu OZ zieht und auf ihr die Länge $CP = c$ abträgt. Es ist auch bekannt, wie die Lage des Punktes C in der Ebene XOY von den Vorzeichen der Grössen a und b bedingt wird; in derselben Weise bestimmt das Zeichen von c die Seite der Ebene XOY, nach welcher die Linie CP zu messen ist, indem man annimmt, dass alle auf der einen Seite der Ebene gemessenen Linien dieser Art als positiv gelten, während die auf der andern Seite derselben gemessenen negativ sind. Man betrachtet z. B. die z aller über der Ebene XOY gelegenen Punkte als positiv und die z aller unter derselben gelegenen Punkte als negativ unter der Voraussetzung, dass diese Ebene selbst eine Horizontalebene ist. Es erhellt zugleich, dass für jeden in der Ebene XOY gelegenen Punkt $z = 0$ ist.

Die von den Achsen miteinander gebildeten Winkel sind will-

ine drei
4, PB, PC
y, der z
der jedes-

struction ge-
Länge $OD = a$
ene yz, messe
e durch E die
Achse der z die
parallel zu xy;

Der Winkel zwisch
malen gemessen, welch
nem beliebigen Punkte
Winkel der Normalen,
nen fällt.

Der Winkel zwische
durch den Winkel gemes
Punkte aus einschliessen

Wenn wir von dem
schenswerth, ohne Zweid
stumpfen Winkel dersel
z. B. für den Winkel der
Sinne von P nach P' und
die Parallele PQ derselb
kel zwischen diesen Linie
der Linien PP' und $C'C$ s
gesetztem Sinne zu zieh
chen die Linien mit eina

Wenn wir von den
mit den Achsen bildet, so
che OP mit den positiven

nem beliebigen Punkte derselben errichten
Winkel der Normalen, die man von irgend
nen fällt.

Der Winkel zwischen zwei Linien, we
durch den Winkel gemessen, den zwei Para
Punkte aus einschliessen.

Wenn wir von dem Winkel zweier Lin
schenswerth, ohne Zweideutigkeit auszudrü
stumpfen Winkel derselben verstehen. Da
z. B. für den Winkel der Linien PP', CC' in
Sinne von P nach P' und von C nach C' dur
die Parallele PQ derselbe Sinn festgehalten
kel zwischen diesen Linien ein spitzer. We
der Linien PP' und $C'C$ sprechen, so ist die
gesetztem Sinne zu ziehen und wir erhalte
chen die Linien mit einander bilden.

Wenn wir von den Winkeln sprechen,
mit den Achsen bildet, so verstehen wir dar
che OP mit den positiven Seiten der Achsen

te“

ade
der-
ehen-
s sind
ectan-
Projec-
chsen.
grenz-
andere
uct der
nus des

on auf OX,
zum Durch-
nder normal

gleich der Summe
dieselbe Gerade.

7. *Wir* werd
speciellen Falle de
Die Summe
Punktes P auf e
seines Radius
Denn die Betra
zeigt, dass *die* Pr
von $OD\,(=x)$, D

8. *Nachdem* w
sätze begründet *ha*
wir zu dem eigent
Die *Coordi*
Entfernung zwi
in *dem* Verhält

$$x = \frac{mx'' +}{m +}$$

$$PQ = PP' . \cos P'PQ,$$

endlich aber

$$PQ = DD',$$

weil diese Geraden die in zwei parallelen geraden Linien von zwei parallelen Ebenen gebildeten Abschnitte sind.

6. Für drei beliebige Punkte P, P', P'' ist die Projection von PP'' auf eine beliebige Gerade der Summe der Projectionen von PP' und $P'P''$ auf dieselbe Gerade gleich.

Wenn D, D', D'' die Projectionen der drei Punkte sind, so ist DD'' die Summe von DD' und $D'D''$, so lange D' zwischen D und D'' liegt. Liegt aber D'' zwischen D und D', so ist DD'' die Differenz von DD' und $D'D''$, und da der Sinn des Uebergangs von D' nach D'' der entgegengesetzte von dem von D nach D' ist, so ist DD'' die algebraische Summe von DD' und $D'D''$.

Dass die Projection von $P'P''$ im letzteren Falle mit dem negativen Zeichen zu nehmen ist, geht auch daraus hervor, dass in diesem Falle die Länge der Projection das Product von $P'P''$ in den cosinus eines stumpfen Winkels ist.

Für eine beliebige Anzahl von Punkten P, P', P'', P''', etc. ist allgemein die Projection von PP''' auf eine beliebige Gerade gleich der Summe der Projectionen von PP', $P'P''$, $P''P'''$ auf dieselbe Gerade.

7. Wir werden oft Gelegenheit haben, von dem folgenden speciellen Falle des Vorhergehenden Gebrauch zu machen.

Die Summe der Projectionen der Coordinaten des Punktes P auf eine beliebige Gerade ist der Projection seines Radius Vectors auf dieselbe Gerade gleich.

Denn die Betrachtung der Punkte O, D, C, P in Figur 1 oder 3 zeigt, dass die Projection von OP der Summe der Projectionen von $OD\ (= x)$, $DC\ (= y)$ und $CP\ (= z)$ gleich sein muss.

8. Nachdem wir diese auf die Projectionen bezüglichen Grundsätze begründet haben, die wir häufig anwenden werden, kehren wir zu dem eigentlichen Gegenstand dieser Untersuchung zurück.

Die Coordinaten desjenigen Punktes, welcher die Entfernung zwischen zwei Punkten x', y', z'; x'', y'', z'' in dem Verhältniss $m : n$ theilt, sind

$$x = \frac{mx'' + nx'}{m + n}, \quad y = \frac{my'' + ny'}{m + n}, \quad z = \frac{mz'' + nz'}{m + n}$$

aten
ecks

nkte
rbin-

unktes und
der andern

den Schwer-
Punkt. Denn

ie Verbindungs-

weil die Coordina
auf die drei Achs

$$x = \varrho$$

Und aus

ergiebt sich für
tungscosinus des
Relation

co

---

*) Ich bin dem
zur Bestimmung der
bietet jedoch die A
der Linie mit den
entsprechenden Fo
gegeben sind, weil
Sind α, β, γ di
yz, zx, xy macht, w
und der z gegen die

auf die drei Achsen sind, die Gle

$$x = \varrho \cos \alpha, \quad y = \varrho$$

Und aus

$$x^2 + y^2 +$$

ergiebt sich für diese drei cosinus
tungscosinus des Radius vector beze
Relation

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta +$$

---

*) Ich bin dem gewöhnlichen Ge
zur Bestimmung der Richtung einer Ge
bietet jedoch die Anwendung ihrer Co
der Linie mit den Coordinatenebenen
entsprechenden Formeln für schiefwi
gegeben sind, weil sie später nicht geb

Sind α, β, γ die Winkel, welche
yz, zx, xy macht, während A, B, C di
und der z gegen die Ebenen yz, zx, xy

e

en Li-
Rich-

7 leicht zu

in γ.
o verschwin-
jection von x
e x und ϱ mit
und α.

$(bc - cb)$ $=$ $(a$

Wenn aber
raden bezeichnen,
Relation hervor, w
identisch wird.

Beispiel. Ma
tes x', y', z' von
Richtungswink
Ist P der gege
rechte, so ist offenb

und die Anwendung
die Bemerkung, das

giebt

$$PQ^2 = (y'$$

14. Man so
finden, die zu

Wenn aber a, b, c; a', b', c' di
raden bezeichnen, so geht unser
Relation hervor, weil die rechte Seite
identisch wird.

Beispiel. Man soll den senkre
tes x', y', z' von einer durch den
Richtungswinkeln α, β, γ gehen

Ist P der gegebene Punkt, OQ die
rechte, so ist offenbar

$$PQ = OP. s$$

und die Anwendung des so eben für
die Bemerkung, dass

$$x' = OP \cos$$

giebt

$$PQ^2 = (y' \cos \gamma - z' \cos \beta)^2$$

14. Man soll die Richtun
finden, die zu zwei gegebenen

enen
der

;

y

eren, wel-
angspunkt

der neuen Coor
gleich der Proje
alte Coordinate

$$\underline{x} = X$$
$$y = X$$
$$z = X$$

Nach Artike

$\cos^2$
$\cos^2$
$\cos^2$

Und wenn
ist nach Artikel

$\cos\alpha \cos\alpha' +$
$\cos\alpha' \cos\alpha'' +$
$\cos\alpha'' \cos\alpha +$

Mit Hilfe di
Uebergange

gleich der Projection des Radius v
alte Coordinate ist. Wir erhalten

$$\underline{x} = X \cos\alpha + Y \cos\alpha$$
$$y = X \cos\beta + Y \cos\beta$$
$$z = X \cos\gamma + Y \cos\gamma$$

Nach Artikel 11 ist überdiess

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos$$
$$\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos$$
$$\cos^2\alpha'' + \cos^2\beta'' + \cos$$

Und wenn die neuen Achsen
ist nach Artikel 13

$$\cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' +$$
$$\cos\alpha' \cos\alpha'' + \cos\beta' \cos\beta'' +$$
$$\cos\alpha'' \cos\alpha + \cos\beta'' \cos\beta +$$

Mit Hilfe dieser Relationen be

Uebergange von einem Syst

ch
ar-

em
ι, v
d z,
Ar-

,
,
'.

liebigen
en Coor-

$y \sin B$
$z \sin C$

Die Coordinaten
Substitution; man ka
wickelungen in den „
formationen“ Artikel
gleichen.

Die Coordinatentransformation ist
Substitution; man kann daher die betre
wickelungen in den „Vorlesungen über
formationen“ Artikel 12 und den Inhal
gleichen.

II. Kapitel.

Interpretation der Gleichungen.

---

18. Es erhellt aus der Construction des Artikel 1, dass zwei gleichzeitige Gleichungen

$$x = a, \quad y = b$$

welche das z unbestimmt lassen, den Punkt C allein bestimmen und daher den Punkt P irgendwo in der Linie CP angeben. Diese beiden Gleichungen sind daher als Repräsentation der so bezeichneten geraden Linie zu betrachten, als welche der Ort aller Punkte ist, deren $x = a$ und deren $y = b$ ist.

Zwei Gleichungen dieser Form repräsentieren sonach eine zur Achse der z parallele Gerade; insbesondere repräsentieren die Gleichungen

$$x = 0, \quad y = 0$$

die Achse der z selbst. Ebenso für die anderen Achsen.

Wenn die einzige Gleichung

$$x = a$$

gegeben wäre, so würden wir nur den Punkt D erfahren und daraus zu schliessen haben, dass der Punkt P irgendwo in der Ebene $PBDC$ liege; seine Lage innerhalb dieser Ebene bleibt aber unbestimmt. Diese Ebene als der Ort aller der Punkte, welche $x = a$ haben, ist durch die Gleichung analytisch dargestellt; und jede Gleichung von dieser Form repräsentiert eine der yz Ebene parallele Ebene, und insbesondere bezeichnet die Gleichung

$$x = 0$$

die yz Ebene selbst. Ebenso für die anderen Coordinatenebenen.

19. Im Allgemeinen repräsentiert eine einzige Gleichung zwischen den Coordinaten eine Fläche, zwei

bestimmten Ort beschränkt. Jeder
Orte angehört, entsprechen in der L
ten P und die Vereinigung derselben
ungen repräsentiert.

Und da die Punkte C, welche
sind, in einer gewissen geraden o
ist klar, dass die Punkte P auch in
halten sind, wobei sie jedoch durch
Ebene liegen.

Anderseits hat die Betrachtung
der Punkte, deren Coordinaten jeder
zeln genügen, eine Fläche ist; in
jenigen Punkte, deren Coordinaten
die Vereinigung aller der Punkte,
getrennt betrachteten Gleichungen r
sind, d. h. derselbe ist die Durchs

III. Wenn drei Gleichungen gegeben sind, so genügen dieselben offenbar zur Bestimmung der drei unbekannten Grössen x, y, z und durch sie werden daher einzelne Punkte dargestellt. Da jede einzelne der drei Gleichungen eine Fläche repräsentiert, so sind es diejenigen reellen oder imaginären Punkte, welche den drei Flächen gemein sind.

20. Die Flächen werden gleich den ebenen Curven nach dem Grade der Gleichungen classificiert, durch welche sie dargestellt sind.

Da für jeden Punkt in der Ebene xy

$$z = 0$$

ist, so liefert die Substitution $z = 0$ in eine beliebige Gleichung die Relation, welche zwischen den x und y Coordinaten derjenigen Punkte besteht, in denen die Ebene xy die durch die Gleichung dargestellte Fläche schneidet, d. h. die Gleichung der ebenen Durchschnittscurve. Es ist offenbar, dass die Gleichung dieser Curve im Allgemeinen von demselben Grade ist, wie die der Fläche; denn zuerst: der Grad der Gleichung des Schnittes kann nicht grösser sein als der Grad der Gleichung der Fläche, und sodann: es ist nur scheinbar, dass er kleiner sein könnte. So ist z. B. die Gleichung

$$zx^2 + ay^2 + b^2x = c^3$$

vom dritten Grade, und wir erhalten doch für $z = 0$ eine Gleichung zweiten Grades als die der Schnittcurve mit der xy Ebene; da aber die Originalgleichung homogen sein muss, um eine geometrische Bedeutung zu haben, so ist nothwendig jedes ihrer Glieder von der dritten Dimension in einer Linear-Einheit, und die nach der Substitution $z = 0$ übrig bleibenden Glieder sind daher auch als vom dritten Grade zu betrachten und bilden eine mit einer Constanten multiplicierte Gleichung zweiten Grades; d. h. das Resultat der Substitution bezeichnet einen Kegelschnitt und eine unendlich entfernte gerade Linie.

Wenn wir also die unendlich entfernten Geraden in die Betrachtung aufnehmen, so können wir sagen, dass die Durchschnittslinie einer Fläche vom n^{ten} Grade mit der Ebene xy immer vom n^{ten} Grade ist; und da nach den Ergebnissen unserer Untersuchung über die Transformation jede beliebige Ebene zur Ebene xy gemacht werden kann, und durch eine Transformation der Coordi-

mit einander mn Durchschnittspunk
respective von den Graden m, n
Punkte.

Diess ergiebt sich aus der T
wenn wir zwischen den bezeichne
y und z eliminieren, so erhalten w
Gleichung vom Grade mnp und als
„Vorlesungen über die Algebra de
Artikel 36.) Damit ist zugleich be
m^{ten}, n^{ten} und p^{ten} Grade sich in n

22. Wenn eine Gleichung nur
hält, wie z. B.

$$\varphi(x, y) =$$

so kann sie zunächst als Gleichung
betrachtet werden, ohne dass man
von der Regel ansehen dürfte, na

zur Darstellung einer Curve erforderlich sind; denn dabei ist die Voraussetzung $z = 0$ stillschweigend gemacht worden, und es erscheint also eine Curve in der xy Ebene durch die beiden Gleichungen

$$\varphi(x, y) = 0, \quad z = 0$$

dargestellt. Denken wir uns die letztere Gleichung unterdrückt, so genügen die Coordinaten jedes Punktes der übrig bleibenden Gleichung

$$\varphi(x, y) = 0,$$

dessen x und y ihr genügen, welches auch das z desselben sei, d. h. diese Gleichung repräsentiert alle Punkte einer Fläche, welche durch Bewegung einer zu der Achse der z parallelen geraden Linie längs jener Curve in der Ebene xy erzeugt wird. Sie heisst eine cylindrische Fläche, wie jede Fläche, welche durch Bewegung einer geraden Linie parallel mit sich selbst hervorgebracht wird.

Wenn eine Gleichung nur eine der Veränderlichen z. B. x enthält, so wissen wir aus der Theorie der Gleichungen, dass sie in n Factoren von der Form

$$x - a = 0$$

zerfällt, und sie repräsentiert daher nach Artikel 20 n Ebenen, welche sämmtlich zu einer der Coordinatenebenen parallel sind.*)

---

*) Den allgemeinen Abschluss dieser Betrachtungen über Gleichungen zwischen weniger als drei Coordinaten und namentlich die Entwicklung der Bedingungen, unter welchen eine allgemeine Gleichung auf eine solche specielle Form reduciert werden kann, giebt die Algebra der linearen Transformationen. (Vergl. „Vorlesungen“ Artikel 57 f., was die Resultate betrifft Artikel 60.)

$z = 0$

dargestellt wird und die Transform
Achsen kann den Grad dieser Glei
ändern.

Wir kommen zu dem nämlich
Gleichung der durch drei ge
ten Ebene entwickeln; sie entsteh
Grössen l, m, n zwischen den Gleic

$$\begin{aligned} l\,(x - x') + m\,(x - x'') \\ l\,(y - y') + m\,(y - y'') \\ l\,(z - z') + m\,(z - z'') \end{aligned}$$

welche im Artikel 9 gegeben sind
ung vom ersten Grade. Man kann s

$$\left|\begin{array}{l} x - x',\ x - x'', \\ y - y',\ y - y'', \\ z - z',\ z - z'', \end{array}\right.$$

en, für
nkt der
mit den

beliebigen
raussetzung
he der Pro-
Linie; man
Gleichung

rade

ndem man sie
nn

sen voraussetzen,
winklige Coordina-

gebildeten Wink

Dieser *Winkel*
vom Anfangspunkt
ander *einschliessen.*
bekannt sind, *welch*
sen, so erhalten wi

$$\cos\theta = \frac{}{\sqrt{}}$$

$$\sin^2\theta = \frac{(AB' -}{}$$

Aus ihnen folgt
ander sind, wenn

$$A$$

ist, und dass sie
dingungen

Dieser Winkel ist ebenso gross
vom Anfangspunkt auf beide Ebenen g
ander einschliessen. Da nun nach dem
bekannt sind, welche diese Normalen
sen, so erhalten wir nach Artikel 13

$$\cos\theta = \frac{AA' + BB}{\sqrt{\{(A^2 + B^2 + C^2)\,(}}$$

$$\sin^2\theta = \frac{(AB' - A'B)^2 + (BC' -}{(A^2 + B^2 + C^2)\,(}$$

Aus ihnen folgt, dass die Ebene
ander sind, wenn

$$AA' + BB' + CC$$

ist, und dass sie einander paral
dingungen

n die allge-
tsprechende

fehlt, z. B.
ie Ebene die
Ebene ist der
$B = 0$ sind,
licher Entfer-
parallel. (Vgl.
rden alle drei
wir erkennen

$$+ y \{z' (x$$
$$+ z \{x' (y$$
$$= x' (y'' z''$$

(vergl. Artikel 2
A, B, C, D.

Wenn wir x
Punktes betracht
dingung, unte
liegen.

Beispiel 1. D
Figur 1 *sind*

Der von *ihn*

$$+ z\{x'(y'' - y''') + x'''(y'''$$
$$= x'(y''z''' - y'''z'') + x''(y'''z$$

(vergl. Artikel 23) aus ihr erhelle
A, B, C, D.

Wenn wir x, y, z als die Coo
Punktes betrachten, so geben die
dingung, unter welcher vier
liegen.

Beispiel 1. Die Gleichungen d
Figur 1 sind

$$\frac{y}{b} = \frac{z}{c}, \quad \frac{x}{a}$$

Der von ihnen eingeschlosse

$$\cos\theta = \frac{}{\sqrt{(a^2 + c^2}}$$

Anfangs-

y', z', etc.
dass das
$'$, ϱ''' in die

aus dem An-
n, so dass sie
das sechsfache

er Pyramide und
t. Die obige De-

der Seiten jenes sphä

Man erkennt das
minante nach der gev

$$\cos\alpha''\cos\alpha''' +$$

giebt als solches

d. i.

$$1 + 2\,co$$

welches mit dem frag

Die Bemerkung
winklige gerade Linie

die Einheit zum Wert

Man erkennt das Nämliche, wenn ma
minante nach der gewöhnlichen Regel bi

$$\cos\alpha''\cos\alpha''' + \cos\beta''\cos\beta''' + c$$

giebt als solches

$$\begin{vmatrix} 1 & , & \cos c, \\ \cos c, & & 1 & , \\ \cos b, & & \cos a, \end{vmatrix}$$

d. i.

$$1 + 2\cos a\cos b\cos c - c$$

welches mit dem fraglichen Werthe über

Die Bemerkung erscheint nützlich,
winklige gerade Linien die Determinant

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha' & , & \cos\beta' & , \\ \cos\alpha'' & , & \cos\beta'' & , \\ \cos\alpha''', & & \cos\beta''', & \end{vmatrix}$$

die Einheit zum Werthe hat; denn ihr Q

$$= \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix}$$

hnitts-

von drei
sie in den
Werthe der
e Determi-

$B'C) = 0$

benen der-
hittlinien sind
in einem un-

en sich vier

n von x, y, z
also die Deter-

ausgedrückt. **)

---

*) Ihre Form un
Ebenen, *die derselb*
entfernten Ebene in

**) *Das Volu*
stimmten Ebene
indem *man die Coo*
substituiert. Das Re
sechs*fache Volumen*

$(A$

gegeben ist, in *welch*
Deter*minanten* bede
Zählers und somit *de*
nen *durch* denselben
Inhalt wird un*endlic*
gera*den Linie* paral
nach den Elemen*ten*
Man *vergleiche* hierz

*) Ihre Form und die Bedingung des
Ebenen, die derselben geraden Linie par
entfernten Ebene in einem Punkte schne

**) Das Volumen des von vier d
stimmten Ebenen begrenzten Tet
indem man die Coordinaten ihrer Ecke
substituiert. Das Resultat ist (vergl. „Vo
sechsfache Volumen durch den Ausdruck

$$\frac{(AB'C'')}{(AB'C'')\,(A'B''C''')\,(A''}$$

gegeben ist, in welchem die zwischen de
Determinanten bedeuten. (a. a. O. Art
Zählers und somit der fragliche Inhalt v
nen durch denselben Punkt gehen; und d
Inhalt wird unendlich gross, sobald irg
geraden Linie parallel sind. Die Deter
nach den Elementen D gebildeten Minore
Man vergleiche hierzu F. Joachimsth

32. Es ist, ganz ebenso wie in der analytischen Planimetrie, evident, dass für

$$S = 0, \quad S' = 0, \quad S'' = 0$$

als Gleichungen von drei Flächen, und a, b, c als willkürliche Constanten durch

$$aS + bS' = 0$$

eine Fläche repräsentiert wird, welche durch die Schnittlinie der Flächen

$$S = 0, \quad S' = 0$$

hindurchgeht; und ebenso durch

$$aS + bS' + cS'' = 0$$

eine Fläche, welche die gemeinschaftlichen Punkte der drei Flächen

$$S = 0, \quad S' = 0, \quad S'' = 0$$

enthält. Sind insbesondere

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0$$

die Gleichungen von drei Ebenen, so ist

$$aL + bM = 0$$

die Gleichung einer Ebene, welche durch die Schnittlinie der ersten beiden unter ihnen geht, und

$$aL + bM + cN = 0$$

die Gleichung einer Ebene, welche den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt aller drei enthält. Wir bemerken als specielle Fälle, dass

$$aL + b = 0$$

eine Ebene bezeichnet, welche zur Ebene

$$L = 0$$

parallel ist, und dass ebenso

$$aL + bM + c = 0$$

eine Ebene bezeichnet, welche zur Durchschnittslinie der Ebenen

$$L = 0, \quad M = 0$$

parallel geht. (Vergl. Artikel 29.)

---

applications des Determinants à la Géométrie“ in „Crelle's Journal“ Bd. XL, p. 21—47, insbesondere p. 25 f.

x, y, z und die Durchschnittslini

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A'x$$

gehenden Ebene ausdrücken.

Sie ist

$$(A'x' + B'y' + C'z' + D')$$
$$= (Ax' + By' + Cz' + D)$$

Beispiel 2. Welches ist die Gl
Figur 1?

Die Gleichungen von BC sind

$$\frac{x}{a} = 1, \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} =$$

also ist die Gleichung der geforderten Eb

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}$$

denn sie geht nach dieser ihrer Form du
linien der gegebenen Punkte.

nern Winkel
die Halbier-
lerselben Ge-

zeigt die fol-
benen seiner
Halbierungs-
einem Punkte;

,

ner Ecke des
Flächenwinkel

,
.

ers in gleicher

ausgedrückt. Seine
des Büschels ist ga
monische Verhältniss

Aus

folgt die Bedingu
lung

$$2\,(ad +$$

Sind dann

$$b_1 L +$$
$$b_2 L +$$

zwei Paare von Ebe
Coefficienten der Gl

$$aL +$$

$d—c$ $a—$

ausgedrückt. Seine Beziehung zu d
des Büschels ist ganz dem dort Geg
monische Verhältniss geht ebenso da

Aus

$$\frac{d-b}{d-c} : \frac{a-b}{a-c} =$$

folgt die Bedingungsgleichung
lung

$$2\,(ad + bc) - (a + d$$

Sind dann

$$b_1 L + M = 0, \quad c_1 L$$
$$b_2 L + M = 0, \quad c_2 L$$

zwei Paare von Ebenen desselben B
Coefficienten der Gleichungen

$$aL + M = 0, \quad dL$$

Glei-
dann
Paare

paare
ch dem
mination

n leicht zu
ergehen.
twickelungen
gelschn.“ Ar-
der sogenann-
Raum gleich-
rvorgehen und

die fünfte Ebene be
aL

gebracht *werden* soll
der Auflösung der v
aA_1 +
aB_1 +
aC_1 +
aD_1 +

hervor, welche *stets*
festen Ebenen nicht
Daher *entspring*
naten im Raume,

---

*) Man vergleiche
Algebra *der binären* Fo
der neueren Geometrie
B. G. Teubner, 1862.
Salmon, Anal. Geom. d.

$$aL + bM + cN +$$

gebracht werden soll, so geht die Be
der Auflösung der vier Bedingungsgle

$$aA_1 + bA_2 + cA_3 +$$
$$aB_1 + bB_2 + cB_3 +$$
$$aC_1 + bC_2 + cC_3 +$$
$$aD_1 + bD_2 + cD_3 +$$

hervor, welche stets möglich und bes
festen Ebenen nicht durch einen Pun

Daher entspringt daraus ein Sy
naten im Raume, bei welchem

---

*) Man vergleiche die vollständige Al
Algebra der binären Formen in des Herau
der neueren Geometrie und der Algebra
B. G. Teubner, 1862.

durch eine lineare homogene Gleichung zwischen vier Veränderlichen dargestellt wird. Wir bezeichnen jene vier festen Ebenen, die Fundamentalebenen des Systems,

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \quad P = 0$$

hier und zuweilen in der Folge, wo wir von diesem System Gebrauch machen, durch die Symbole

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0$$

sodass die Gleichung einer beliebigen Ebene durch

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta = 0$$

dargestellt ist. Die Erinnerung an die Normalform der Gleichung der Ebene in Cartesischen Coordinaten

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p$$

zeigt, dass die Veränderlichen α, β, γ, δ, welche hier als Coordinaten eines Punktes im Raume auftreten, die Längen der Normalen bedeuten, welche von ihm auf die Fundamentalebenen gefällt werden können; ihre Verhältnisse bestimmen die Lage des Punktes, die vier Coordinaten desselben Punktes sind durch die Relation

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D = V$$

verbunden, wenn wir durch A, B, C, D die Flächen der den Gleichungen

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0$$

respective entsprechenden Seitenebenen des Fundamentaltetraeders und durch V das Dreifache seines Volumens bezeichnen. Aus dieser Relation folgt, dass die paradoxe Gleichung

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D = V = 0$$

die Ebene der unendlich entfernten Punkte repräsentiert; in genauer Uebereinstimmung mit dem entsprechenden Ergebniss für das Cartesische System (Artikel 25). Wir stellen dazu die Bemerkung, dass man die Gleichungen des Cartesischen Systems in homogene Formen überführen kann durch Vollzug der einfachen Substitution

$$\frac{x}{\omega}, \quad \frac{y}{\omega}, \quad \frac{z}{\omega}$$

für x, y, z, nach welcher die Grösse ω als Vertreter der zu Grunde gelegten Maasseinheit in dieselben eintritt.

Die Gleichung einer Fläche vom n^{ten} Grade wird in

und man bildet aus ihr durch Multi

$$(\alpha_1 - \alpha_2),\ (\beta_1 - \beta_2),\ (\gamma$$

respective die Identitäten

$$(\alpha_1 - \alpha_2)^2 = -\frac{B}{A}(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 -$$

$$-\frac{D}{A}(\alpha_1 - \alpha_2)(\delta_1 -$$

$$(\beta_1 - \beta_2)^2 = -\frac{C}{B}(\beta_1 - \beta_2)(\gamma_1 -$$

$$-\frac{A}{B}(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 -$$

etc.,

welche beweisen, dass die Quadrate de
die Producte derselben ersetzt werde
Quadrat der fraglichen Entfernung re

$\delta_1 - \delta_2)$

$(\delta_1 - \delta_2)$

$', p'', p'''$

spiel kurz angedeutet

$$r^2 = -\frac{1}{pp'p''}\{(ab)^2 p'$$

$$+ (bc)^2 p (\beta_1 -$$

übereinstimmend mit de

metrie; man kann in

$\frac{F}{(bc)}, \frac{F}{(ca)}, \frac{F}{(ab)}$ ersetzen

Fundamental-Dreiecks

Kegelsch." Aufgabe 6 i

mit gleichseitigem Fun

hältnisscoordinaten ang

System dem Leser über

enthält leider einen nich

fehler. Wir wollen endl

metrischen Formel des

seits und die p, p', p''

haben. Die Homogene

der Proportionalität, di

$$r^2 = -\frac{1}{pp'p''}\Big\{(ab)^2\, p''\,(\alpha_1 - \alpha_2)\,(\beta_1 -$$
$$+ (bc)^2\, p\,(\beta_1 - \beta_2)\,(\gamma_1 - \gamma_2)\Big\}.$$

übereinstimmend mit der entsprechenden
metrie; man kann in ihr die Grössen
$\frac{F}{(bc)}, \frac{F}{(ca)}, \frac{F}{(ab)}$ ersetzen, wenn man du
Fundamental-Dreiecks bezeichnet. Im
Kegelsch." Aufgabe 6 ist die analoge Lö
mit gleichseitigem Fundamentaldreieck
hältnisscoordinaten angegeben und die
System dem Leser überlassen worden; d
enthält leider einen nicht angezeigten jed
fehler. Wir wollen endlich erinnern, dass
metrischen Formel des Textes zu dieser
seits und die p, p', p'' anderseits ihre g
haben. Die Homogeneität der Formel e
der Proportionalität, die zwischen den a

rten

etwa

acd,

raden

jenes

γ_3, δ_3

$a_1\gamma + \gamma_1$

dargestellt. Dieselben

ad, bc, ac, ab der Ka

in einer der geraden L

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} + \frac{\beta}{\beta}$$

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} + \frac{\beta}{\beta}$$

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} + \frac{\gamma}{\gamma}$$

$$\frac{\beta}{\beta_1} + \frac{\gamma}{\gamma}$$

sind, nämlich die Punk

dargestellt. Dieselben dreifachen Be
ad, *bc*, *ac*, *ab* der Kanten und zeig
in einer der geraden Linie liegen, de

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} + \frac{\beta}{\beta_1} + \frac{\gamma}{\gamma_1} = 0,$$
$$\frac{\alpha}{\alpha_1} + \frac{\beta}{\beta_1} + \frac{\delta}{\delta_1} = 0,$$
$$\frac{\alpha}{\alpha_1} + \frac{\gamma}{\gamma_1} + \frac{\delta}{\delta_1} = 0,$$
$$\frac{\beta}{\beta_1} + \frac{\gamma}{\gamma_1} + \frac{\delta}{\delta_1} = 0,$$

sind, nämlich die Punktegruppen

ab, *bc*, *ca*;
ab, *bd*, *da*;
ac, *cd*, *da*;
bc, *cd*, *db*.

nten,
n, so
Ebene
wischen

0,

r von der
Coordinaten

$L = 0,$ M

durch die Gleichungen

$L + M$
$L + N$
$L + P$

ausgedrückt und man erk
gehenden Gleichheit

$L +$

dass die Verbindungslinie
einen und denselben Pu
gefunden haben.

38. Man kann aber
Grundlage geben, indem
Ebenencoordinaten e
tikel 34 f. analog ist. M
Fundamentalpunkte und
fernungen von diesen, d

durch die Gleichungen

$$L + M = 0, \quad N +$$
$$L + N = 0, \quad P +$$
$$L + P = 0, \quad M +$$

ausgedrückt und man erkennt, wegen d
gehenden Gleichheit

$$L + M + N + P$$

dass die Verbindungslinien der Mittelpun
einen und denselben Punkt gehen, w
gefunden haben.

38. Man kann aber diesen Betrac
Grundlage geben, indem man ein Syst
Ebenencoordinaten entwickelt, we
tikel 34 f. analog ist. Man bezieht j
Fundamentalpunkte und bestimmt sie
fernungen von diesen, die man als il

Die Möglichkeit einer solchen Darstellung erhellt einerseits durch Elimination nach der Methode des Artikel 34.

Man kann aber anderseits zur Begründung des fraglichen Coordinatensystems sehr einfach von den Ergebnissen des Artikel 8 gelangen. Wenn wir durch

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0$$

die Gleichungen zweier unter den Fundamentalpunkten a, b bezeichnen, als welche aussagen, dass die senkrechten Abstände dieser Punkte von allen durch sie hindurchgehenden Ebenen gleich Null sind; wenn wir sodann für eine beliebige Ebene durch α, β die Perpendikel bezeichnen, die von jenen auf sie gefällt werden, so ist die Länge desjenigen Perpendikels, welches auf dieselbe Ebene von demjenigen Punkte aus gefällt wird, der die Verbindungslinie jener Fundamentalpunkte nach dem Verhältniss $l : m$ theilt

$$\frac{l\alpha + m\beta}{l + m},$$

und so fern jene Ebene durch diesen Theilungspunkt selbst hindurchgeht, ist die Relation

$$l\alpha + m\beta = 0$$

nothwendig erfüllt; diess ist also die Gleichung jenes Theilpunktes der Verbindungslinie der Fundamentalpunkte selbst. Verbindet man ihn mit dem dritten Fundamentalpunkte

$$\gamma = 0$$

und theilt die Strecke zwischen beiden im Verhältniss $n : (l + m)$, so ist die Länge der von diesem Theilpunkt auf eine feste von den drei Fundamentalpunkten um die Abstände α, β, γ entfernte Ebene gefällten Normale

$$\frac{(l + m)\,\dfrac{l\alpha + m\beta}{l + m} + n\gamma}{l + m + n} = \frac{l\alpha + m\beta + n\gamma}{l + m + n}$$

und für

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$$

geht jene Ebene durch diesen Theilpunkt selbst. Die Fortsetzung dieser Betrachtungen auf einen Theilpunkt der geraden Verbindungslinie des Letztbetrachteten mit dem vierten Fundamentalpunkt

$$\delta = 0$$

nach dem Verhältniss $p : (l + m + n)$ liefert für die allgemeine Gleichung eines Punktes

$$l\alpha + m\beta + n\gamma + p\delta = 0,$$

weil sie erfüllt wird durch die Coordinaten jeder Ebene, die durch ihn gelegt werden kann. In dieser Entwickelung ist zugleich die Art und Weise bezeichnet, durch welche ein durch seine Gleichung bestimmter Punkt gefunden werden kann.

Man ersieht aus ihr, dass der Schwerpunkt des von den vier Fundamentalpunkten gebildeten Tetraeders durch die Gleichung

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$$

dargestellt wird, in genauer Uebereinstimmung mit dem, was wir vorher in dem aus dem Cartesischen abgeleiteten System der Ebenencoordinaten gefunden haben. Die Mittelpunkte der Kanten sind

$$\alpha + \beta = 0,\ \alpha + \gamma = 0,\ \alpha + \delta = 0,\ \beta + \gamma = 0,\ \beta + \delta = 0,$$
$$\gamma + \delta = 0$$

die Schwerpunkte der Seitenflächen aber

$$\alpha + \beta + \gamma = 0,\ \beta + \gamma + \delta = 0,\ \alpha + \gamma + \delta = 0,$$
$$\alpha + \beta + \delta = 0.$$

Die Relationen des Doppelschnittverhältnisses, der harmonischen Theilung, der Involution übertragen sich nun mit derselben Leichtigkeit und in unveränderter Form auf geradlinige Punktreihen; denn wenn

$$L = 0,\quad M = 0$$

zwei Punkte repräsentieren, so sind

$$aL + bM = 0,\quad a'L + b'M = 0,\ \text{etc.}$$

Punkte ihrer geraden Verbindungslinie; für die drei Punkte

$$L = 0,\quad M = 0,\quad N = 0$$

repräsentieren Gleichungen der Form

$$aL + bM + cN = 0$$

Punkte ihrer Ebene; die Punkte

$$L = 0,\quad M = 0,\quad N = 0$$

liegen in einer Geraden, wenn zwischen ihren Gleichungen die Identität

$$aL + bM + cN = 0$$

und die vier Punkte

$$L = 0,\quad M = 0,\quad N = 0,\quad P = 0$$

an be-
ng

ebnissen
ches aus
e hervor-

gleichzei-
linie dieser
kte enthält,
zuletzt Vor-
ngen zweier
eine gerade
ie jener bei-
hrung dieser

Gleichungen der Projec
Verbindungslinien der g
Punkte identisch sind,

Die Durchschni

$$Ax +$$
$$Ax +$$

ist durch die Gleichung

$$\frac{x}{BC' - B'C}$$

repräsentiert.

Beispiel 1. Welch
Linien AD und BE in
Sie sind

$$\frac{a -}{}$$

$$\frac{x}{a}$$

Punkte identisch sind, wie diess auch

Die Durchschnittslinie zwe

$$Ax + By + Cz +$$
$$A'x + B'y + C'z +$$

ist durch die Gleichungen

$$\frac{x}{BC' - B'C} = \frac{y}{CA' - C'}$$

repräsentiert.

Beispiel 1. Welches sind die G
Linien AD und BE in Figur 1?

Sie sind

$$\frac{a - x}{a} = \frac{y}{b} =$$

$$\frac{x}{a} = \frac{b - y}{b} =$$

wel-

he wir

mmen

kann.

on vier

lation

n; zugleich

respective

h Gleichungen

$= n'z + b'$

in die cosinus der

sind, so erhalten wir

$$\frac{x - x'}{\cos \alpha} =$$

eine Form der Gleichu

ihrer Symmetrie nach

Form des Artikel 39 vo

Constanten einschliesst.

Beispiel. Die Bed

raden

$$\frac{x-x'}{l} = \frac{y-y'}{m} =$$

ist

$(x'-x'')(m'n-mn') + ($

Welches sind die Co

Wenn wir umgek

den mit den Achsen

so bringen wir ihre Gl

$$\frac{x-x'}{\cos\alpha} = \frac{y-y'}{\cos\beta} = \frac{z-}{co}$$

eine Form der Gleichungen der gerad
ihrer Symmetrie nach x, y, z häufig
Form des Artikel 39 vorzuziehen ist, o
Constanten einschliesst.

Beispiel. Die Bedingung des D
raden

$$\frac{x-x'}{l} = \frac{y-y'}{m} = \frac{z-z'}{n}, \quad \frac{x-x}{l'}$$

ist

$$(x'-x'')(m'n-mn')+(y'-y'')(n'l-nl$$

Welches sind die Coordinaten ihres D

Wenn wir umgekehrt die von
den mit den Achsen gebildeten
so bringen wir ihre Gleichung in die

0

lie dann
chtungs-

$B)^2$.

len

so sind ihre

$q) = 0$

bestimmten Ebene fin

Diese Ebene enthält
x', y', z'; x'', y'', z'', deren

$x' -$

proportional sind; in Folge
malen respective proportion

$(y' - y'') \cos\gamma -$ $(z' - z'$
$(x' - x''$

und diese Letzteren geben da
liche Gleichung ein; man find
den so gebildeten Ausdruck
zieht, in der Form

$(y'z'' - y''z') \cos\alpha +$ $(z$

Beispiel 7. Die Gleic
Bewegung der ihre Ric

$$\frac{x - x'}{\quad} =$$

Salmon, Anal. Geom. d. Raume

Diese Ebene enthält die Verbindungsli
x', y', z'; x'', y'', z'', deren Richtungscosinu

$$x' - x'', \; y' - y'', \; z'$$

proportional sind; in Folge dessen sind die
malen respective proportional den Grössen

$$(y' - y'') \cos\gamma - (z' - z'') \cos\beta, \; (z' - z''$$
$$(x' - x'') \cos\beta - (y' - y$$

und diese Letzteren gehen daher als Coefficie
liche Gleichung ein; man findet endlich ihr a
den so gebildeten Ausdruck die Substitutio
zieht, in der Form

$$(y'z'' - y''z') \cos\alpha + (z'x'' - z''x') \cos$$

Beispiel 7. Die Gleichung einer E
Bewegung der ihre Richtung behalt

$$\frac{x - x'}{l} = \frac{y - y'}{m} = \frac{z}{}$$

en
den

ntung
kt der
en Ge-

in Punkt
lben sind

l zu

aus der gege-

dargestellt werden.

Beispiel. Wenn in
tikel 41 $x' = y' = z' =$
gegebenen Ebenen gebilde

$$\frac{D^2}{D'}$$

44. Man soll de

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} =$$

gebildeten Winkel

---

*) Da die Gleichunge
naten *gelten*, so mögen e
vereinigt werden. *Die Gr*
der *Projectionen* einer *ge*
zur Strecke *selbst*, *wenn*
Parallelen zu den Coordin

Beispiel. Wenn in der Gleichung d
tikel 41 $x' = y' = z' = 0$ sind, so ha
gegebenen Ebenen gebildeten Winkel für

$$\frac{D^2}{D'^2} = \frac{A^2 + B}{A'^2 + B}$$

44. Man soll den durch die

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}, \quad \frac{x-}{l'}$$

gebildeten Winkel bestimmen.*

---

*) Da die Gleichungen dieser Form
naten gelten, so mögen einige dieselben
vereinigt werden. Die Grössen l, m, n be
der Projectionen einer gegebenen Streck
zur Strecke selbst, wenn man voraussetz
Parallelen zu den Coordinatenebenen geb

$+ l'm)$

$_n + bl$

eu.

1

durch *eine* Verlegung de
abgeleitet wird.

Wenn man die *Läng*
ligen Dreiecks, aus welch
K als das Product von L
ausdrückt, so erhält man

$$K = \cos\alpha\ (x' - x'')$$

und mittelst derselben die

$$x_n = x' + K\cos\alpha, \quad y_n$$

45. Man soll den
der Ebene

$$Ax + B$$

mit der geraden Linie

$$\frac{x - a}{l} =$$

gebildet wird.

abgeleitet wird.

Wenn man die Länge der zweiten ligen Dreiecks, aus welchem der cosinu K als das Product von L in den cosin ausdrückt, so erhält man für sie den

$$K = \cos\alpha\ (x' - x'') + \cos\beta\ (y' -$$

und mittelst derselben die Coordinaten d

$$x_n = x' + K\cos\alpha, \quad y_n = y' + K\,c$$

45. Man soll den Winkel be der Ebene

$$Ax + By + Cz +$$

mit der geraden Linie

$$\frac{x - a}{l} = \frac{y - b}{m} =$$

gebildet wird.

und
Wir
den
das
r Ge-
ne xy

stellen,
belie-
her die
gleichen
n Gleich-
vorgehen-
eigt.*)

nten enthält,
nd vier gege-
eiten Grades

x cos

x —

cos

gegeben sind; denn d
den Richtungswinkeln
den Richtungswinkeln
Richtungscosinus eine
portional zu

cos β' cos γ — co

cos

---

unzählig viele gerade Lin
füllen vier Constanten zur
Grade muss eine beg
halten, weil die Zahl de
Zahl der verfügbaren C
Graden enthalten nicht m
sen, um diess zu thun, b

$$\frac{x - x}{\cos \alpha'} = \frac{y - y}{\cos \beta'}$$

gegeben sind; denn die gesuchte Ebe
den Richtungswinkeln α', β', γ' und
den Richtungswinkeln α, β, γ; nach
Richtungscosinus einer zu ihr normal
portional zu

$$\cos \beta' \cos \gamma - \cos \beta \cos \gamma', \quad \cos$$
$$\cos \alpha' \cos \beta - \cos$$

---

unzählig viele gerade Linien enthalten, w
füllen vier Constanten zur Disposition sind
Grade muss eine begrenzte Anzah
halten, weil die Zahl der Bedingungen, w
Zahl der verfügbaren Constanten überein
Graden enthalten nicht mit Nothwendigke
sen, um diess zu thun, besonderen Beding

nur
lich
ich-
nien.
raden

$$\frac{z - z''}{\cos \gamma'}$$

l 41 ent-
, ψ, χ als
sform für

wenn wir durch ϑ den
kel bezeichnen, wie im
bestimmte *normale* Entf
Linie, die man von ei
Punkte der andern Ebe

49. Man soll di
kürzesten Entfernu
schneidenden Gera

Die kürzeste Entfe
normale gerade Linie,
Man lege durch jede d
eine Ebene, welche zu
normal ist; ihre Durch
parallelen Ebenen und
Linien; die Construction
nen Geraden schneidet,

kel bezeichnen, wie im Artikel 13. E
bestimmte normale Entfernung kürzer i
Linie, die man von einem Punkte de
Punkte der andern Ebene ziehen kann

49. Man soll die Gleichung
kürzesten Entfernung zwischen
schneidenden Geraden bestimm

Die kürzeste Entfernung zweier
normale gerade Linie, welche folgen
Man lege durch jede der beiden gerad
eine Ebene, welche zu den nach Arti
normal ist; ihre Durchschnittslinie ist
parallelen Ebenen und somit auch der
Linien; die Construction zeigt, dass si
nen Geraden schneidet, sie giebt also

nige
nicht
utzen

ngen
n vier

d, e, f
nit dem
n Seiten
bezeich-

$= 1,$

BC gültige

ausgedrückt, so dass

$$d^2 - e^2 = d'^2 - e'^2,$$

sind. Wenn man also
des letzten Artikels d
diese Substitutionen di

$$- F = p^2 (2 a^2 b$$

in welcher der mit p^2
des Quadrats von der
wir bemerken, dass da
lumen des Tetraeders

welche der Forderung

Man kann zu ders
Determinantenausdruck
selbst in Form einer

$$d^2 - e^2 = d'^2 - e'^2,\ e^2 - f^2 = e'^2 -$$

sind. Wenn man also den Werth der
des letzten Artikels durch F bezeichn
diese Substitutionen die neue Gleichung

$$-F = p^2 (2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^$$

in welcher der mit p^2 multiplicierte Au
des Quadrats von der Fläche des Drei
wir bemerken, dass das $p$fache dieser
lumen des Tetraeders giebt, so erhält

$$F = -144 V$$

welche der Forderung entspricht.

Man kann zu derselben auch gela
Determinantenausdruck des Artikel 31 a
selbst in Form einer Determinan

en
ht,
delt
nten
eich-

ischen
en; denn
ene, geht

gemeineren
ina V, V'

co

sind, so können wir au
Artikel 13 der „*Vorlesu*
bil*den*, deren Werth *id*

$$\cos \alpha_i^2 +$$

$$\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta$$

die Form annimmt

$$\begin{matrix} 1 & , & co \\ \cos ba, & & \\ \cos ca, & & co \\ \cos da, & & co \end{matrix}$$

die den obigen Werth wi
wenn man die Hauptelem
Diese Determinante geht
mination von A, B, C,

sind, so können wir aus dieser Gruppe vo
Artikel 13 der „Vorlesungen“ gegebenen M
bilden, deren Werth identisch verschwin

$$\cos \alpha_i^2 + \cos \beta_i^2 + \cos$$

$$\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1$$

die Form annimmt

$$\begin{vmatrix} 1 & , \cos ab, & \cos ac, & \cos \\ \cos ba, & 1 & , \cos bc, & \cos \\ \cos ca, & \cos cb, & 1 & , \cos \\ \cos da, & \cos db, & \cos dc, & 1 \end{vmatrix}$$

die den obigen Werth wiedergiebt. Man v
wenn man die Hauptelemente 1 durch cos
Diese Determinante geht z. B. auch als R
mination von A, B, C, D aus den Gleic

des

die

ie Relation

chenden der
Das sechs-
den Halb-
nhalt eines
Längenzah-

durch das Verschwin
Bedingung, unter wel
ander orthogonal sind
Da die Theorie
darbietet, so wollen wi
dass die kürzeste
seiten eines Tetra
sechsfachen Volum
der Längen der Geg

len der Gegenkanten
seiner Seiten hat. W
tigen Analogien dieser Art
bestehen, und merken an,
mathematischer Aufsätze
sind; sie bieten Uebungen
in die neuere Form ertheil

*) Vergl. Siebeck,

Bedingung, unter welcher die beiden b
ander orthogonal sind.

Da die Theorie des Tetraeders z
darbietet, so wollen wir hier als Beispie
dass die kürzeste Entfernung z
~~seiten~~ kanten eines Tetraeders mit der
sechsfachen Volumen desselben
der Längen der Gegenseiten in d

---

len der Gegenkanten des Tetraede
seiner Seiten hat. Wir wollen durch d
tigen Analogien dieser Art hinweisen, die zw
bestehen, und merken an, dass einige dersel
mathematischer Aufsätze und Bemerkungen
sind; sie bieten Uebungen dar durch den Ann
in die neuere Form ertheilen.

*) Vergl. Siebeck, „Journal f. d. r. u.

gebildeten Winkels übereinstimmt, und wir erinnern zum Beweise dieses Satzes nur an die Relationen

$$2ad \cos \theta = b^2 + e^2 - c^2 - f^2,$$
$$2be \cos \varphi = c^2 + f^2 - a^2 - d^2,$$
$$2cf \cos \psi = a^2 + d^2 - b^2 - e^2.$$

Der Anblick derselben zeigt unmittelbar, dass die Rechtwinkligkeit zweier Paare von Gegenkanten auch die des dritten Paares bedingt und dass dann die Summe der Quadrate der Paare der Gegenkanten gleich gross ist.

Anmerkung. Im Anschluss an die Erinnerung an die Geometrie des ebenen Dreiecks, welche die soeben für den Radius der umgeschriebenen Kugel entwickelte Formel hervorruft und an den ganzen Gang der Entwickelung in diesen Artikeln, mag hier bemerkt werden, dass auch die Determinante des vorigen Artikels noch auf eine bemerkenswerthe Weise in diesem vor- und rückwärtsschauenden Zusammenhange steht. Wir haben angegeben, wie von ihr aus die Relation zwischen den sechs Abständen von vier Punkten einer Ebene hervorgeht. Wenn wir nun bemerken, dass so wie hier vom Tetraeder zum sphärischen Viereck und durch Verschwinden einer Dimension zum ebenen Viereck eine analoge Entwickelung vom ebenen Dreieck zu drei Punkten eines grössten Kugelkreises und von da durch Verschwinden einer Dimension zu einer allgemeinen Relation zwischen den Abständen von drei Punkten einer Geraden führt, so kann man an eine Fortsetzung dieses Gedankenganges nach einem idealen Raume von vier Dimensionen denken, um dann durch Verschwinden einer Dimension in den anschaubaren Raum dreier Dimensionen zurückzukehren, um eine Relation zwischen den gegenseitigen Entfernungen von fünf Punkten im Raume zu gewinnen.

Das ebene Dreieck giebt die sich selbst erklärenden Formeln

$$a = b \cos C + c \cos B,$$
$$b = c \cos A + a \cos C,$$
$$c = a \cos B + b \cos A,$$

und die Elimination von a, b. c die mehrfach erwähnte Relation zwischen den Winkeln eines Dreiecks

$$\begin{vmatrix} -1, & \cos C, & \cos B \\ \cos C, & -1, & \cos A \\ \cos B, & \cos A, & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \cos ca, & \cos cb, & 1 & , & co \\ \cos da, & \cos db, & \cos dc, & & \\ \cos ea, & \cos eb, & \cos ec, & & co \end{vmatrix}$$

und der entsprechende Uebergang die R
seitigen Abständen ab, ac, etc. von f
Raume

$$\begin{vmatrix} 0, & 1 , & 1 , & 1 , & \\ 1, & 0 , & \overline{ab}^2, & \overline{ac}^2, & \overline{a} \\ 1, & \overline{ba}^2, & 0 , & \overline{bc}^2, & \overline{b} \\ 1, & \overline{ca}^2, & \overline{cb}^2, & 0 , & \overline{c} \\ 1, & \overline{da}^2, & \overline{db}^2, & \overline{dc}^2, & \\ 1, & \overline{ea}^2, & \overline{eb}^2, & \overline{ec}^2, & \overline{e} \end{vmatrix}$$

Man kann von ihr zu der Relatio
rückkehren und sie auch anderweit bes
Punkte einer Kugelfläche die Relation i

neun *Punkte* der Fläc
successive **Substitution**
meine Gleichung *neun*

neun unbekannten G

In derselben Art
mung *einer Fläche* v
um eins kleiner als
Gleichung n^{ten} Grades
des kann auch *(siehe*
Gleichungen von vier

$$ax^2 + by^2 + cz$$
$$+ 2$$

ausgedrückt werden,
ser Gleichung können
neun gegebene *Punkte*
Grades kann durch si

IV. Kapitel.

Allgemeine Eigenschaften der Flächen zweiten Grades.

---

54. Wir schreiben die allgemeine Gleichung vom zweiten Grade in der Form

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2lyz + 2mzx + 2nxy + 2px + 2qy + 2rz + d = 0.$$

Sie enthält zehn Glieder und da durch Division einer der Coefficienten der Einheit gleich gemacht werden kann, so erkennt man neun Bedingungen als hinreichend zur Bestimmung einer Fläche zweiten Grades oder, wie wir sie abkürzend nennen könnten, einer quadratischen Fläche. Wenn z. B. neun Punkte der Fläche gegeben sind, so erhalten wir durch die successive Substitution der Coordinaten eines jeden in die allgemeine Gleichung neun Gleichungen, welche zur Bestimmung der neun unbekannten Grössen $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, etc. hinreichend sind.

In derselben Art erkennen wir die Anzahl der zur Bestimmung einer Fläche n^{ten} Grades nothwendigen Bedingungen als um eins kleiner als die Anzahl der Glieder in der allgemeinen Gleichung n^{ten} Grades. Die Gleichung einer Fläche zweiten Grades kann auch (siehe Artikel 34) als eine homogene Function der Gleichungen von vier gegebenen Ebenen x, y, z, w in der Form

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2 + 2lyz + 2mzx + 2nxy + 2pxw + 2qyw + 2rzw = 0$$

ausgedrückt werden, denn die neun unabhängigen Constanten dieser Gleichung können so bestimmt werden, dass die Fläche durch neun gegebene Punkte geht, d. i. jede gegebene Fläche zweiten Grades kann durch sie dargestellt werden.

t

i-

er

pec-

Coor-

e gleich

Wiedereinführung vo

über und drückt *offe*
gewissen *festen* Eben
der eben *geschrieben*
durch den Anfangspu
Ebene *gelegene* Radiu
Wir erkennen, d
Fläche zweiten Gr
selben *gezogen* w
alle in einer Ebene
in diesem *Punkte*
Wenn die *Gleichu*

geschrieben *wird*, in
zweiten Grade *in den*

$$px + qy + r$$

über und drückt offenbar aus, dass
gewissen festen Ebene liegt. Und da
der eben geschriebenen Beschränkung
durch den Anfangspunkt der Coordin
Ebene gelegene Radius vector die Flä

Wir erkennen, dass in einem g
Fläche zweiten Grades unendli
selben gezogen werden könn
alle in einer Ebene liegen, welc
in diesem Punkte genannt wir

Wenn die Gleichung der Fläche

$$u_2 + u_1 =$$

geschrieben wird, in welcher die Glie
zweiten Grade in den Veränderlichen

$$u_1 = 0$$

q)

$= 0.$

die

dass

gente

einen

x', y', z'

en x, y,

angenten-

monischen Mittel

vectoren der Flä

Untersuchen wir

schen Theilung für d

vectoren, bezeichnen

tischen Gleichung des

fraglichen Ortes, so

$$\frac{2}{\varrho} = \frac{1}{\varrho'},$$

d. i. durch Rückkehr

px

---

*) Eine Fläche, die

die stets durch einen fe

zeichnete feste Punkt d

Cylinder ist der Grenzf

Scheitels in unendlich g

vectoren der Fläche definiert

Untersuchen wir nämlich den O
schen Theilung für die durch den An
vectoren, bezeichnen wir durch ϱ', ϱ''
tischen Gleichung des Art. 56 und du
fraglichen Ortes, so ist *

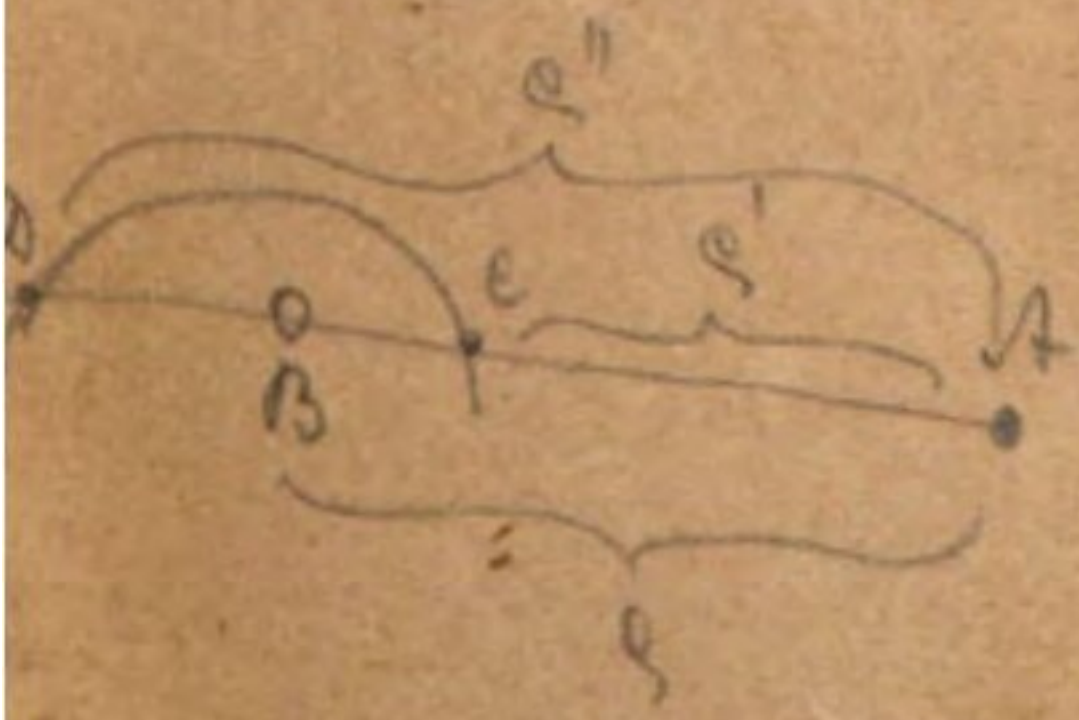
$$\frac{2}{\varrho} = \frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''} = -\frac{2}{\ldots}$$

d. i. durch Rückkehr zu den x, y,

$$px + qy + rz +$$

---

*) Eine Fläche, die durch Bewegung e
die stets durch einen festen Punkt geht
zeichnete feste Punkt der Scheitel- oder
Cylinder ist der Grenzfall eines Kegels
Scheitels in unendlich grosse Entfernung



CA : CB

ϱ' : (ϱ - ϱ

ϱ''(

oder die Gleichung der Polarebene des Anfangspunktes, die auch aus der entwickelten Gleichung des Artikel 58 für

$$x' = y' = z' = 0$$

hervorgeht.

Aus dieser Definition der Polarebene ist evident, dass für jeden durch einen gegebenen Punkt gehenden ebenen Schnitt einer Fläche die Polare des Punktes in Bezug auf die Schnittcurve durch den Durchschnitt der Ebene des Schnittes mit der Polarebene des Punktes gegeben wird; denn der Ort der harmonischen Mittel aller durch diesen Punkt gehenden Radien vectoren enthält nothwendig auch den Ort der harmonischen Mittel derjenigen Radien vectoren, welche in der Schnittebene liegen.

61. Wenn die Polarebene eines Punktes *A* den Punkt *B* enthält, so geht die Polarebene des Punktes *B* durch den Punkt *A*.

Denn da die Gleichung der Polarebene in Bezug auf x, y, z und x', y', z' symmetrisch ist, so erhalten wir offenbar dasselbe Resultat durch die Substitution der Coordinaten des zweiten Punktes in die Gleichung der Polarebene des ersten, als durch die der Coordinaten des ersten in die Gleichung der Polarebene des zweiten.

Der Durchschnitt der Polarebenen von *A* und *B* ist eine gerade Linie, welche wir die Polarlinie der Geraden *AB* in Bezug auf die Fläche nennen wollen.

Man sieht, dass die Polarlinie von *AB* der Ort der Pole aller der Ebenen ist, welche durch die Linie *AB* gelegt werden können.

Es ist nicht schwer, die Gleichungen solcher Linien darzustellen. Man kann nach dem Winkel fragen, den sie mit einander bilden und erkennt, dass eine Fläche zweiten Grades existiert, für welche jede gerade Linie auf ihrer Polare rechtwinklig steht: Es ist die Kugel. Wir erinnern an die allgemeine Theorie der Winkelgrössen in der „Analyt. Geom. d. Kegelschnitte“ Artikel 448.

62. Wenn in der Originalgleichung nicht nur

$$d = 0$$

sondern auch

$$p = q = r = 0$$

sind, so wird die gefundene Gleichung der Tangentenebene (Artikel 58) illusorisch, weil jedes ihrer Glieder verschwindet und keine

geschrieben werden, von denen die e
absoluten Gliedes anzeigt, dass die Ta
beliebigen Punkte des Kegels d
geht, während die zweite ausdrück
ebene in irgend einem Punkte
jedem Punkte der geraden Lin
Punkt (x', y', z') mit dem Scheite
die nämliche Ebene repräsentiert, wen
tive Rx', Ry', Rz' substituiert.

Wenn der Punkt (x', y', z') nic
repräsentiert die zuletzt betrachtete G
ses Punktes und man erkennt in gleich
ebene jedes Punktes durch d
geht, und dass alle Punkte, di
durch den Scheitel gehenden
nämliche Polarebene haben.

en

Form

pmq

bcp^2

liegen muss. Nach Ar

durch den Anfangsp

Polarebene desselb

rade Linie im Anfa

65. Unter den

setzungen

$p =$

wird jede durch d

Linie in ihm halbie

das Centrum der F

Jede Fläche zw

ein und nur ein Ce

mation der Coordinaten

Gleichung auf den geme

so erhalten wir die drei

---

*) Vergl. „Vorlesungen

Polarebene desselben paralle
rade Linie im Anfangspunkt hal

65. Unter den gleichzeiti
setzungen

$$p = 0, \quad q = 0,$$

wird jede durch den Anfangspu
Linie in ihm halbiert und der An
das Centrum der Fläche genann

Jede Fläche zweiten Grades
ein und nur ein Centrum. Denn
mation der Coordinaten die Coefficiente
Gleichung auf den gemeinschaftlichen V
so erhalten wir die drei Bedingungsgle

---

*) Vergl. „Vorlesungen“, Artikel 57, 62

er Be-

der Ebenen

---

*) Wenn die Hesse'sc
nach dem Elemente *d*, d. i
eine Cylinderfläche. Wen
gleichzeitig mit dem Nenn
naten des Centrums unbe
Centra. So dann, wenn di

durch dieselbe gerade Linie
Centrum. Die Bedingung,

geschrieben werden, welche
terminanten bezeichnet, die
gebildet werden können. W
Fall zurück.

*) Wenn die Hesse'sche Determinante Δ
nach dem Elemente d, d. i. δ, zugleich mit N
eine Cylinderfläche. Wenn, wie es möglich
gleichzeitig mit dem Nenner derselben verso
naten des Centrums unbestimmt und die Fl
Centra. So dann, wenn die drei Ebenen

$$\frac{dU}{dx}, \quad \frac{dU}{dy}, \quad \frac{dU}{dz}$$

durch dieselbe gerade Linie gehn; dann ist je
Centrum. Die Bedingung, unter welcher die

$$\left\| \begin{matrix} a, & n, & m, & p \\ n, & b, & l, & q \\ m, & l, & c, & r \end{matrix} \right\| =$$

geschrieben werden, welche das gleichzeitig
terminanten bezeichnet, die aus den gesch
gebildet werden können. Wir kommen im f
Fall zurück.

$$\frac{dU}{dx} = 0, \quad \frac{dU}{dy} = 0, \quad \frac{dU}{dz} = 0,$$

d. h. durch das Centrum der Fläche gehende Ebene; wir benennen sie als die der gegebenen Richtung der Sehnen conjugierte Diametralebene der Fläche.

Wenn irgend ein Punkt in dem durch den Anfangspunkt der Coordinaten in der gegebenen Richtung gezogenen Radius vector die Coordinaten x', y', z' hat, so kann die Gleichung der Diametralebene in der Form

$$x' \frac{dU}{dx} + y' \frac{dU}{dy} + z' \frac{dU}{dz} = 0$$

geschrieben werden.

Die Gleichung der Polarebene des Punktes Rx', Ry', Rz'

$$Rx' \frac{dU}{dx} + Ry' \frac{dU}{dy} + Rz' \frac{dU}{dz} + \frac{dU}{d\omega} = 0$$

giebt aber, durch R dividiert und für unendlich wachsendes R die nämliche Gleichung; welches zeigt, dass die Diametralebene die Polarebene des unendlich entfernten Punktes der gegebenen geraden Linie ist, wie wir auch mittelst geometrischer Betrachtungen hätten beweisen können. (Vgl. „Analyt. Geom. d. Kegelschnitte“ Artikel 330 f.)

In derselben Weise wird erkannt, dass das Centrum der Pol der unendlich entfernten Ebene ist; denn wenn der Anfangspunkt das Centrum der Fläche ist, so wird (Artikel 60) die Gleichung seiner Polarebene

$$d = 0,$$

welche nach Artikel 25 eine unendlich entfernte Ebene repräsentiert.

Wenn speciell die gegebene Fläche ein Kegel ist, so fällt die Ebene, welche alle einer durch den Scheitel gehenden festen Geraden parallelen Sehnen halbiert, mit der Polarebene irgend eines Punktes dieser Linie zusammen. Wir haben früher erkannt, dass allen Punkten einer solchen Geraden dieselbe Polarebene entspricht und finden jetzt in Uebereinstimmung damit, dass die Polarebene ihres unendlich entfernten Punktes d. i. die ihr conjugierte Diametralebene die nämliche ist.

67. Die Ebene, welche die der Achse der x parallelen Sehnen halbiert, wird durch die Voraussetzungen

$$B = 0, \quad C = 0$$

aus der Gleichung des vorigen Artikels gefunden und ist also

$$\frac{dU}{dx} = 0$$

oder

$$ax + ny + mz + p = 0;^{*})$$

sie ist der Achse der y parallel, wenn

$$n = 0$$

ist. Diess ist aber auch die Bedingung, unter welcher die der Achse der y conjugierte Diametralebene der Achse der x parallel ist; d. h. wenn die einer gegebenen Richtung conjugierte Diametralebene eine andere Richtung enthält, so enthält die dieser letzteren Richtung conjugierte Diametralebene auch die erste Richtung.

Wenn $n = 0$ ist, so sind offenbar die Achsen der x und y einem Paare von conjugierten Durchmessern des durch die Ebene xy bestimmten Schnittes parallel, und man erkennt ausserdem, dass die jedem dieser Durchmesser conjugierte Diametralebene den andern enthält; denn der Ort der Mittelpunkte aller Sehnen der Fläche, welche einer gegebenen Geraden parallel sind, schliesst nothwendig den Ort der Mittelpunkte aller der Sehnen dieser Art ein, welche in einer gegebenen Ebene enthalten sind.

Drei Diametralebenen heissen conjugiert, wenn jede von ihnen zur Durchschnittslinie der beiden andern conjugiert ist; und drei Durchmesser heissen conjugiert, wenn jeder von ihnen conjugiert ist der Ebene der beiden andern.

Wir erhalten also ein System von drei conjugierten Durchmessern, wenn wir zu zwei conjugierten Durchmessern eines beliebigen ebenen durch das Centrum geführten Schnittes den der

---

*) Daraus folgt, dass die Ebene

$$x = 0$$

die der Achse der x parallelen Sehnen halbiert, wenn

$$n = 0, \quad m = 0, \quad p = 0$$

ist; oder wenn die Originalgleichung keine ungerade Potenz von x enthält. Es ist überdiess offenbar, dass diess der Fall sein muss, damit für beliebige bestimmte Werthe von y und z gleiche und entgegengesetzte Werthe für x erhalten werden.

× Dessen gl. Nr: $nx + by + lz + q = 0$

hier ist das $x_2 y_2$ ||, wenn $n = 0$

e fügt

den, d. h.

bestehen. *Wir könn*
A, *B*, *C* eliminieren

$$a -$$

oder in entwickelter

$$R^3 - R^2 (a + b +$$

Die *successive* E
bestimmten Werthe v
erlaubt uns die Bes
A, B, C.

Eine quadrati
nen drei Hauptdia

bestehen. Wir können aus diesen in
A, B, C eliminieren und erhalten zu

$$\begin{vmatrix} a-R, & n & , \\ n & , b-R, & \\ m & , & l & , c \end{vmatrix}$$

oder in entwickelter Form

$$R^3 - R^2(a+b+c) + R(ab+$$
$$-(abc+2l$$

Die successive Einführung der
bestimmten Werthe von R in die vo
erlaubt uns die Bestimmung der
$A, B, C.$

Eine quadratische Fläche
nen drei Hauptdiametralebene

en,

ersel-
„Vor-

ng be-

trum als

Was aus ge
der Centra *de*
ihrer Ebenen
lässt sich *ebenfall*

70. Wenn ϱ
des Artikel 56 be
durch den *Coeffici*
nun die Gleichung
sten *parallelen* Ra
ficient von ϱ^2 *un*
der Radius vector

Wenn *also*
liebige paralle
der *Fläche* die
men, so *sind di*
der in einem co
hältniss $U' : U''$,

der Centra der parallelen Sc
ihrer Ebenen conjugierte Dur
lässt sich ebenfalls leicht algebraisc

70. Wenn ϱ', ϱ'' die Wurzeln
des Artikel 56 bezeichnen, so ist
durch den Coefficienten von ϱ^2 divi
nun die Gleichung zu parallelen Ac
sten parallelen Radius vector zu be
ficient von ϱ^2 unverändert und das
der Radius vectoren ist dem neuen

Wenn also durch die geg
liebige parallele Sehnen gezo
der Fläche die Punkte R, R';
men, so sind die Producte RA
der in einem constanten Verh
hältniss $U' : U''$, wenn wir dur

ch
b-
die
lm
men

eichung
o liefert

73. Wenn der
liegt und *die Relati*

durch *die Coordinate*
ung des Artikel 71

an *und liefert* daher
gegengesetzten *Vorze*
Punkte wird also dur
selben *Verhältniss*, d.
heissen dann harmo
Ort *der* harmonis
gehenden *Radien*

$$x\frac{dU'}{dx'} + y$$

74. Wenn allge

liegt und die Relation

$$P = 0$$

durch die Coordinaten erfüllt ist, so ni
ung des Artikel 71 die Form

$$m^2 U' + l^2 U''$$

an und liefert daher für $l : m$ numeri
gegengesetzten Vorzeichen. Die Verb
Punkte wird also durch die Fläche äus
selben Verhältniss, d. h. sie wird harm
heissen dann harmonische Pole de
Ort der harmonischen Theilpun
gehenden Radien vectoren der

$$x \frac{dU'}{dx'} + y \frac{dU'}{dy'} + z \frac{dU'}{dz'}$$

74. Wenn allgemein die gerade

$$\frac{\Delta}{\lambda}$$

$$\frac{\Delta}{\lambda} y = \tfrac{1}{2} \frac{d\Delta}{dn} \alpha$$

$$\frac{\Delta}{\lambda} z = \tfrac{1}{2} \frac{d\Delta}{dm} \alpha$$

$$\frac{\Delta}{\lambda} w = \tfrac{1}{2} \frac{d\Delta}{dp} \alpha$$

wenn wir durch Δ w

Substitution dieser W

$$\alpha x$$

liefert dann die gefor

$$\alpha^2 \frac{d\Delta}{da} + \beta^2 \frac{d\Delta}{db} +$$

$$+ \alpha\beta \frac{d\Delta}{dn} +$$

nders
den?
unkten

n gemein-

$$= 0$$

$$\frac{\Delta}{\lambda} y = \tfrac{1}{2} \frac{d\Delta}{dn} \alpha + \frac{d\Delta}{db} \beta +$$

$$\frac{\Delta}{\lambda} z = \tfrac{1}{2} \frac{d\Delta}{dm} \alpha + \tfrac{1}{2} \frac{d\Delta}{dl} \beta +$$

$$\frac{\Delta}{\lambda} w = \tfrac{1}{2} \frac{d\Delta}{dp} \alpha + \tfrac{1}{2} \frac{d\Delta}{dq} \beta +$$

wenn wir durch Δ wie früher die D

Substitution dieser Werthe in die Gl

$$\alpha x + \beta y + \gamma z +$$

liefert dann die geforderte Relation i

$$\alpha^2 \frac{d\Delta}{da} + \beta^2 \frac{d\Delta}{db} + \gamma^2 \frac{d\Delta}{dc} + \delta^2$$

$$+ \alpha\beta \frac{d\Delta}{dn} + \alpha\delta \frac{d\Delta}{dp} + \beta\delta$$

ng
en.

x_3, x_4

llgemeine

durch *eine* gegebene
berühren, fallen *zusa*
Tangente der Fläche
besitzt.

Beispiel. Wenn ei
sammen*stossende* Kanten
und die Mittelpunkte *der*
diese *Letzteren* und der S

Denn für $2a$, $2b$, 2
setzung, *dass* sie als Coor
in ihren Mitten *und das*
statt, *wenn die* Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{yz}{bc}$$

die Fläche darstellt. Ihr C

$$\frac{2x}{a^2} +$$

berühren, fallen zusammen, ebensow
Tangente der Fläche ist, als wenn die
besitzt.

Beispiel. Wenn eine Fläche zweiten
sammenstossende Kanten eines Tetraeders
und die Mittelpunkte der drei andern Kante
diese Letzteren und der Schwerpunkt des T

Denn für $2a$, $2b$, $2c$ als die Kanten
setzung, dass sie als Coordinatenachsen gew
in ihren Mitten und das Hindurchgehen
statt, wenn die Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca} + \frac{xy}{ab}$$

die Fläche darstellt. Ihr Centrum ist der D

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{z}{ac} + \frac{y}{ab} -$$

das *Centrum* trans
p, q, r und *dieselbe*
$$ax^2 + by^2 + cz^2$$
wenn wir durch d' da
des Centrums *in* die
man erinnert, dass
$$2U' = x' \frac{dU'}{dx'}$$
ist und dass die *Coor*
letzteren Glieder versch
$$d' =$$
ist, *wo* wie vorher Δ
78. *Nachdem* man
die Coordinaten *von* x,
durch *eine* Richtun

p, q, r und dieselbe erhält die Form

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2lyz + 2mz$$

wenn wir durch d' das Resultat der S
des Centrums in die Gleichung der
man erinnert, dass

$$2U' = x' \frac{dU'}{dx'} + y' \frac{dU'}{dy'} +$$

ist und dass die Coordinaten des Cen
letzteren Glieder verschwinden machen,

$$d' = \frac{p\alpha + q\beta + r\gamma}{\delta}$$

ist, wo wie vorher Δ die Discriminant

78. Nachdem man durch Transfor
die Coordinaten von x, y, z auf Null
durch eine Richtungsänderung

$$u' = h' = \frac{1}{2}\left(w' \frac{\partial h'}{\partial w'}\right) = \frac{1}{2}$$

lass

präsentiert
e haben wir

stimmen *die* Co
welche die neuen
hat. *Dieselbe ist* dah

$$A^3 - (a + b + c)\, A^2 +$$

$$-$$

oder in *anderer* Ausdr

$$(A - a)\,(A - b)\,($$

---

*) Die Bil*dung der* e
Coordinatensysteme hat k
ren wir dann *für S*

$$x^2 + y^2 + z^2 -$$

und indem *wir genau* so wi
cubische Gleichung, *deren*
gegenseitiges *Verhältniss* n

**) Es ist dieselbe *cubi*
haben, wie *man sieht.*

$$\lambda\, l'\, m'\, n'$$

$$a' + b' + c'$$

$$b'c' + c'a' + a'b'$$

$$a'b'c'$$

hat. Dieselbe ist daher

$$A^3 - (a+b+c)\,A^2 + (bc + ca + ab -$$
$$- (abc + 2lmn - a$$

oder in anderer Ausdrucksform

$$(A - a)\,(A - b)\,(A - c) - l^2\,(A -$$
$$- n^2\,(A -$$

---

*) Die Bildung der entsprechenden Glei
Coordinatensysteme hat keine Schwierigkeit.
ren wir dann für S

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2yz\cos\lambda - 2zx\,c$$

und indem wir genau so wie im Texte verfah
cubische Gleichung, deren Coefficienten du
gegenseitiges Verhältniss nicht ändern.

**) Es ist dieselbe cubische Gleichung, di
haben, wie man sieht.

$$a' + b' + c' = a + b + c$$
$$b'c' + c'a' + a'b' = bc + ca$$
$$a'b'c' = abc +$$

Cauchy hat folgendermassen bewiesen, dass die sämmtlichen Wurzeln dieser Gleichung reell sind. Sie sei in der Form

$$(A-a)\left\{(A-b)(A-c)-l^2\right\}-m^2(A-b)$$
$$-n^2(A-c)-2lmn=0$$

geschrieben und α, β sollen die Werthe von A bezeichnen, für welche

$$(A-b)(A-c)-l^2=0$$

wird; dann ist die grössere dieser Wurzeln α nothwendig grösser und die kleinere β nothwendig kleiner als jeder der Werthe b und c.*) Durch die Substitution

$$A=\alpha$$

reduciert sich dann die gegebene cubische Gleichung auf

$$-\left\{(\alpha-b)m^2+2lmn+(\alpha-c)n^2\right\},$$

in welcher Form die innerhalb der Klammern stehende Grösse ein vollständiges Quadrat ist, weil man hat

$$(\alpha-b)(\alpha-c)=l^2;$$

d. h. das Resultat dieser Substitution ist wesentlich negativ. Für die Substitution

$$A=\beta$$

erhält man hingegen den Werth

$$(b-\beta)m^2-2lmn+(c-\beta)n^2,$$

ein vollständiges Quadrat und somit wesentlich positiv. Da somit die Substitutionen

$$A=\infty,\quad A=\alpha,\quad A=\beta,\quad A=-\infty$$

abwechselnd positive und negative Resultate liefern, so hat die Gleichung drei reelle Wurzeln, welche zwischen den durch jene Substitutionen bezeichneten Grenzen liegen. Dieselben sind die Coefficienten von x^2, y^2, z^2 in der transformierten Gleichung, es ist aber willkürlich, welche

---

*) Man erkennt diess entweder durch wirkliche Auflösnng oder durch die successiven Substitutionen

$$A=\infty,\ A=b,\ A=c,\ A=-\infty,$$

als welche die Resultate

$$+,-,-,+$$

geben, zum Beweis, dass die eine der Wurzeln grösser als b und die andere kleiner als c ist.

$$D = \begin{vmatrix} a_2, & b_2, \\ a_3, & b_3, \end{vmatrix}$$

nach den Grundsätzen der Determinantenthe

$$D^2 = \begin{vmatrix} \alpha_1, & \beta_1, \\ \alpha_2, & \beta_2, \\ \alpha_3, & \beta_3, \end{vmatrix}$$

für

$$\alpha_i = \frac{dD}{da_i}, \quad \beta_i = \frac{dD}{db_i}, \quad \gamma_i$$

Da im vorliegenden Falle die Werthe
die folgenden sind

$$A = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2, \quad L = \alpha_2 \alpha_3$$
$$B = \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2, \quad M = \alpha_3 \alpha_1$$
$$C = \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2, \quad N = \alpha_1 \alpha_2$$

$$A_1 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2, \quad L_1 = \beta_1 \gamma_1$$
$$B_1 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2, \quad M_1 = \gamma_1 \alpha_1$$
$$C_1 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2, \quad N_1 = \alpha_1 \beta_1$$

so hat man zuerst

len
bi-

n die

er drei
a, *b*, *c*
n

er Achsen
tzen, dass
er längste

und für alle

existiert daher kein
ganz zwischen den

Aehnliches gilt
Wenn zwei der
sind, so sind alle S
rallel *sind*, Kreise;
erzeugt durch Um
oder um ihre kl
Coefficienten die
kleineren sind.

Man bezeichnet
das abgeplattete E

und für alle

$$R > c$$

existiert daher kein reeller Schnitt
ganz zwischen den Ebenen

$$z = \pm c.$$

Aehnliches gilt für die anderen
Wenn zwei der Coefficienten z.
sind, so sind alle Schnitte durch Eb
rallel sind, Kreise; die Fläche ist
erzeugt durch Umdrehung eine
oder um ihre kleine Achse, je
Coefficienten die beiden grös
kleineren sind.

Man bezeichnet diese Flächen
das abgeplattete Ellipsoid.

xy
lern
des

Durch-
hung.
Hyper-

e der-

n Glei-
Form

Die Anschauun
fache *Unterscheidu*
dar; denn wenn
dreht *wird, so* be
getrennten *Theilen*
die conjugierte Ach

IV. *Unter* der
der cubischen G
meine Gleichung di

an, der durch kein
den *kann.*

V. Wenn *das* a
wir den Grenzfall
geben *die Gleichung*

fache Unterscheidung zwischen beid
dar; denn wenn eine Hyperbel um
dreht wird, so besteht die erzeugte
getrennten Theilen, sie ist aber ein
die conjugierte Achse zur Drehungsa

IV. Unter der Voraussetzung,
der cubischen Gleichung nega
meine Gleichung die Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

an, der durch keine reellen Werthe
den kann.

V. Wenn das absolute Glied den
wir den Grenzfall der Kegelfl
geben die Gleichung

zwei-

se Gleich-
die gege-

muss, *dass* also di

reduciert werden k
Bemerkung, dass

die Bedingung ist,
Grades *in* zwei reell
welcher es *also* auc
drate ausgedrückt w

Auf *diesem* Weg

$$Ax^2 \pm By^2$$

gebracht und wir kö
Anfangspunkt der Co
Null identisch *mache*
Gleichung auf

$$Ax^2 \pm$$

$$Ax^2 \pm By$$

reduciert werden können. Und zu
Bemerkung, dass

$$\delta = 0$$

die Bedingung ist, unter welcher das
Grades in zwei reelle oder imaginäre
welcher es also auch als die Summe
drate ausgedrückt werden kann.

Auf diesem Wege wird die allgem

$$Ax^2 \pm By^2 + 2p'x + 2q'y$$

gebracht und wir können dann durch
Anfangspunkt der Coordinaten die Co
Null identisch machen, nicht aber die
Gleichung auf

$$Ax^2 \pm By^2 + 2r'z$$

n
he
tte
nen
ellte
nur

positiv
haben,
en Seite
en Seite

es B das
te Hyper-

in Factoren zerlegbar
len *Ebenen*.

84. *Die Ausfü*
eines Paraboloids

$$Ax^2$$

wird *durch die Be*
criminante *eine I*
formation der Coordin
also wie die *Discrimina*

$$A$$

auch für die allgemein

sein muss. *Da nun A*

---

*) Vergl. „*Vorlesunge*

len Ebenen.

84. Die Ausführung der Re
eines Paraboloids auf die Form

$$Ax^2 + By^2 + 2Rz$$

wird durch die Bemerkung abg
criminante eine Invariante ist,
formation der Coordinaten nicht alter
also wie die Discriminante der reducie

$$Ax^2 + By^2 + 2$$

auch für die allgemeine Gleichung von

$$ABR^2$$

sein muss. Da nun A und B als die

---

*) Vergl. „Vorlesungen“ Artikel 72, 74

entspringt,

$$21x^2 - 6$$

übergeht. Die letzte

Beispiel. Die Gle

$$9x^2 - 4y^2 -$$

repräsentiert ein hyperb

$$4x^2 +$$

einen parabolischen Cyl

ätten

n der

en be-

zu die-

$\sqrt{6}$,

übergeht. Die letzte Reduction hat k

Beispiel. Die Gleichung

$$9x^2 - 4y^2 - 2xy - 36x + 8$$

repräsentiert ein hyperbolisches Paraboloi

$$4x^2 + y^2 - 4xy - 6$$

einen parabolischen Cylinder.

)

r

die

t, näm-

$$\frac{x^2}{a^4}$$

mit jeder der drei *ebene*

$$\frac{x^2}{a^2}$$

hat die Eigenschaft, *das*
gleich *weit* entfernt sind

Beispiel 2. Die Ta

$$\frac{x}{a^2} = \frac{}{}$$

schneidet in *den Achsen*

$$\frac{x}{a} =$$

den Achsen verhältnissgl

Wir können aus

druck für *die Länge*

$$\frac{x^4}{a^4} \quad \frac{y^4}{b^4} \quad \frac{z^4}{c^4}$$

mit jeder der drei ebenda betrachteten Flä

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} =$$

hat die Eigenschaft, dass die Tangentenebe
gleich weit entfernt sind. Man hat diese C

Beispiel 2. Die Tangentenebene des

$$\frac{x}{a^2} = \frac{y}{b^2} = \frac{z}{c^2} = \frac{}{V}$$

schneidet in den Achsen gleiche und die in

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

den Achsen verhältnissgleiche Stücke ab.

Wir können aus den vorigen Gl
druck für die Länge der Normalen

wer-

rungs-
pendi-

enthaltene Stück einer
Abstand der Tangenten
Die durch das Cen
bestimmte Ebene ist d

$$a^2\ (b^2 - c^2)\ \frac{x}{x'} +$$

dargestellt.

Die Normalen, de
Ebene liegen, die zu
eine andere Hauptebene
rallel ist.

88. Die Summe de
von irgend drei zu
messern ist constant
Diess folgt unmittelb

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2}{a^2}$$

Die durch das Centrum und die No
bestimmte Ebene ist durch

$$a^2\ (b^2 - c^2)\ \frac{x}{x'} + b^2\ (c^2 - a^2)\ \frac{y}{y'} +$$

dargestellt.

Die Normalen, deren Fusspunkte
Ebene liegen, die zu einer Haupteben
eine andere Hauptebene in einer Gerad
rallel ist.

88. Die Summe der Quadrate d
von irgend drei zu einander re
messern ist constant.

Diess folgt unmittelbar aus der Ad

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 \beta}{b^2} +$$

n als
ihrer

unk-
bene

kte pa-

sser dem
o werden
rchmesser

verbunden. Dann sin
gierten Durchmessern
für

$$\cos\alpha = a$$

wird die letztgeschrieb

$$\cos\lambda\cos\lambda' +$$

Beispiel. Wenn die
System conjugierter Tan
so ist

$$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p'^2}$$

und für q, q', q'' als die La
Ellipsoids ist

$$\frac{1}{p^2 q^2} + \frac{1}{p'^2 q'^2}$$

91. *Die Summe d*
conjugierten *Halbdu*

gierten Durchmessern entsprechen, recht
für

$$\cos\alpha = a\cos\lambda, \quad \cos\alpha' =$$

wird die letztgeschriebene Relation

$$\cos\lambda\cos\lambda' + \cos\mu\cos\mu' + c$$

Beispiel. Wenn die p, p', p'' die Länge
System conjugierter Tangentenebenen gefäl
so ist

$$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p'^2} + \frac{1}{p''^2} = \frac{1}{a^2} +$$

und für q, q', q'' als die Längen der entsprecl
Ellipsoids ist

$$\frac{1}{p^2 q^2} + \frac{1}{p'^2 q'^2} + \frac{1}{p''^2 q''^2} = \frac{1}{a^4}$$

91. Die Summe der Quadrate v
conjugierten Halbdurchmessern i

der An-

ttes sind
angenten-

unktes und
nkel ist das
Durchmesser

und also nach dem ge

$$\frac{(x' - x_i)^2}{a^2}$$

für die Lage des Punk
ung auf

$$\left(1 + \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2}\right) -$$

und giebt fünf Relation

$$\left(1 + \frac{x'^2}{a^2} + \frac{}{}\right.$$

also das Verschwinden

deren Entwickelung nach

Salmon, Anal. Geom. d. K

$$m_i = \frac{y' - y_i}{x' - x_i}, \quad n_i$$

$$\frac{(x' - x_i)^2}{a^2} + \frac{(y' - y_i)^2}{b^2} +$$

für die Lage des Punktes A_i auf dem Ellips
ung auf

$$\left(1 + \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2}\right) - \frac{2x'}{a^2} x_i - \frac{2y'}{b^2} y_i -$$

und giebt fünf Relationen zwischen den vi

$$\left(1 + \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2}\right), \quad - \frac{2x}{a^2}$$

also das Verschwinden der Determinante d

$$\left(\frac{d_1^2}{D_1^2} 1\, x_3 y_4 z_5\right) =$$

deren Entwickelung nach dem Früheren (V

pede

Sätze
mer-
n ent-
rucks

chtwin-

$a'^2b'^2 \sin^2 \nu.$
$\lambda \cos\mu \cos\nu).$
e vorher er-

irgend drei conj
liebige Ebene ist
Sind d, d', d'' di
von ihnen mit der
Winkel, so ist die Su

$$d^2 \sin^2$$

ausgedrückt, und sie

$$d^2 \cos$$

und nach Artikel 91

constant ist.

Beispiel. Wenn m
Durchmessern eines Ellip
sprechenden Durchmesse
tralebenen projiciert, so
den Durchmessern eine c

Man soll den Or

liebige Ebene ist constant.

Sind d, d', d'' die drei betrachteten von ihnen mit der Normale der bezei Winkel, so ist die Summe der Quadrate

$$d^2 \sin^2\theta + d'^2 \sin^2\theta' +$$

ausgedrückt, und sie ist constant, weil

$$d^2 \cos\theta^2 + d'^2 \cos^2\theta' +$$

und nach Artikel 91

$$d^2 + d'^2 + d'$$

constant ist.

Beispiel. Wenn man durch die Endp Durchmessern eines Ellipsoids parallele Sehn sprechenden Durchmesser durch Parallelen tralebenen projiciert, so geben die Verhält den Durchmessern eine constante Summe.

Man soll den Ort des Durchsch

0

tten

nkte

unkt

sobald

0

ler Fläche

die Natur

sieren.

$+ r \cos \gamma'$

Daher sind die

diese Grösse nach

negativ ist; die Qu

nen *ebensowohl Ell*

sie sind speciell Pa

$a^2 \cos^2$

wenn c^2 *derjenige*

chende Vorzeichen

Mit Hilfe dersel

Satz, dass *die Dur*

des mit paralle

Centra derselbe

der Fläche, welc

jugiert ist. (Verg

95. *Man kann*

befolgten Methode b

diese Grösse nach der positiven Natu
negativ ist; die Querschnitte von Kege
nen ebensowohl Ellipsen als Parabeln
sie sind speciell Parabeln für

$$a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta -$$

wenn c^2 derjenige Coefficient der Glei
chende Vorzeichen besitzt.

Mit Hilfe derselben Methode bewei
Satz, dass die Durchschnitte ein
des mit parallelen Ebenen ähnl
Centra derselben liegen in der
der Fläche, welcher der Lage c
jugiert ist. (Vergl. Artikel 69.)

95. Man kann eben diess Letzte
befolgten Methode beweisen.

r Cen-

n: Man
eines
Punkt
en Punkt

$= 0$

lationen

$$\frac{x_1 -}{\cos}$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$$

also

$$\frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2}$$

und durch Division

$$\frac{(x_1 + x_2)\cos\alpha'}{a^2} +$$

oder nach den Relat
Endpunkten

$$\frac{x\ \cos\alpha'}{a^2}$$

$$\frac{x_1 - x_2}{\cos \alpha'} = \frac{y_1 - y_2}{\cos \beta'}$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x_2}{a^2}$$

also

$$\frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} +$$

und durch Division

$$\frac{(x_1 + x_2) \cos \alpha'}{a^2} + \frac{(y_1 + y_2) \cos \beta'}{b^2}$$

oder nach den Relationen des Mittelpu
Endpunkten

$$\frac{x \cos \alpha'}{a^2} + \frac{y \cos \beta'}{b^2} +$$

ten und Kreis
schnitte einen u

Beispiel 1. Die E

$x \cos$

schneidet das Ellipsoid

$\frac{x}{a}$

in einer Ellipse von der

$(a^2 \cos^2 \alpha +$

$\sqrt{(a^2 \cos^2}$

Beispiel 2. *Wenn*
eine Ebene in der Entfer
so ist für p *als den Ab*
trum der Inhalt des paral

n

m näch-

Beispiel 1. Die Ebene

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z$$

schneidet das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} =$$

in einer Ellipse von der Fläche

$$\frac{(a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos}{\sqrt{(a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta +}}$$

Beispiel 2. Wenn S den Inhalt eines eine Ebene in der Entfernung h vom Centru so ist für p als den Abstand der parallel trum der Inhalt des parallelen Centralschnit

$$S' = \frac{Sp^2}{p^2 - h^2}$$

Kegel
t, ist

liebigen

1

gel

gegebenes Ellipso
dem früher *gegebene*
Schnitte (Artikel 69)
Ebenen *durch das*

Denken wir *nun*
Halbmesser r ist, und
Kugel beschrieben, so

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right)+$$

die Gleichung eines K
und durch die *Durchso*
durchgeht. Haben abe
mein, so *muss diese*
sentieren und es *muss*
oder z^2 *in der* vorigen
fragliche ebene *Schnitt*

dem früher gegebenen Beweis der Ae
Schnitte (Artikel 69) genügt es, Schn
Ebenen durch das Centrum der

Denken wir nun einen Centralsch
Halbmesser r ist, und sei mit demselbe
Kugel beschrieben, so ist nach dem V

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}\right)+$$

die Gleichung eines Kegels, der das
und durch die Durchschnittscurve der
durchgeht. Haben aber beide Flächen
mein, so muss diese Gleichung nothw
sentieren und es muss also einer der
oder z^2 in der vorigen Gleichung ide
fragliche ebene Schnitt muss daher du

eell.
d c^2
er ist

Ebenen
Ebenen

durch
tte und
gen zwei
Fläche.

ormalebene
ne Umdreh-

$$Ax$$

$$(A + H)\, x^2 + ($$

unmittelbar aus der *Fo*

Man erkennt es au

chen

$$\frac{1}{\varrho^2} = A \cos^2 \alpha$$

$$\frac{1}{\varrho^2} = A \cos^2 \alpha$$

aus denen sofort erhellt

ciproken Werthe entspre
constant *ist*. *Wenn* dahe
Fläche der Radius *vecto*
Radius *vector* der ander

Die nämliche Be
Ebene mit beiden
Achsen *bestimmt*, w

unmittelbar aus der Formel des letzten Ar

Man erkennt es auch aus den Polarg
chen

$$\frac{1}{\varrho^2} = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta +$$

$$\frac{1}{\varrho^2} = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta +$$

aus denen sofort erhellt, dass die Differenz
ciproken Werthe entsprechender Radien v
constant ist. Wenn daher in irgend einem
Fläche der Radius vector constant ist, so
Radius vector der andern gelten.

Die nämliche Betrachtung zeig
Ebene mit beiden Flächen Schni
Achsen bestimmt, weil der grösste u

kt des

itte einer
wir eine
chnitten
e dersel-
ung und
lich klei-
en Berüh-
reispunkt.
ähnt werden.
kte können
benen Schnitt,
nse b gleichen
der Endpunkte

gehen*den* ***Kreisschnitt*** vo
dass er in der ***Kugel***

$$x^2$$

liegen **muss.** ***Der*** von ih
schnittskegel ist *durch di*

$$x^2\left(1-\frac{cr}{a^2}\right)+$$

dargestellt und *diese repr*
Glie*der* verschwindet. *Di*
Falle des ell*iptischen* Para

$$\frac{c}{a}$$

weil dann *die Gleichung* au

$$b^2z^2 =$$

reduciert wird. In *dem Fall*
stiert hingegen *kein* reeller

dass er in der Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

liegen muss. Der von ihr mit dem Parab
schnittskegel ist durch die Gleichung

$$x^2\left(1 - \frac{cr}{a^2}\right) + y^2\left(1 \mp \frac{cr}{b^2}\right)$$

dargestellt und diese repräsentiert zwei Eb
Glieder verschwindet. Diese beiden Eben
Falle des elliptischen Paraboloids für

$$\frac{cr}{a^2} = 1,$$

weil dann die Gleichung auf

$$b^2z^2 = (a^2 - b^2)\ y^2$$

reduciert wird. In dem Falle des hyperbol
stiert hingegen kein reeller Kreisschnitt, d

$\}$:

$\}$:

$\left.\frac{}{}\right)\}$ =

$\left.\frac{BC^2)}{}\right\}$:

$\left.\frac{DB^2)}{}\right\}$:

$\left.\frac{CD^2)}{}\right\}$;

aeders $ABCD$

chen Central-
nd, und dass

Gleichung

$$\frac{x^2}{a'^2}$$

die rechte Seite für k
kann. Es ist auch ge
nicht auf einem Ellipso
schlossene Fläche ist, u
Mantelflächen, als von
schiedenen Systemen vo
gelegen ist, während e
setzen muss.

105. Wenn wir d
einer Mantelfläche i

$$\frac{x^2}{a^2} -$$

bringen, so liegt off
den Ebenen

$$\frac{}{a'^2} - \frac{}{b'^2} = 1 +$$

die rechte Seite für keinen reellen Werth
kann. Es ist auch geometrisch evident,
nicht auf einem Ellipsoid existieren kann,
schlossene Fläche ist, und nicht auf einem
Mantelflächen, als von welchem kein Theil
schiedenen Systemen von zwei parallelen Ebe
gelegen ist, während eine gerade Linie
setzen muss.

105. Wenn wir die Gleichung de
einer Mantelfläche in die Form

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 -$$

bringen, so liegt offenbar der Dur
den Ebenen

che al-
entspre-
verhält-
ndamen-
Hyper-
der Ort
chenden
Doppel-
die Schei-
neriert das
cheitel hat.

e Gleichungen

$= \cos\theta$

$- \cos\alpha \cos\alpha'$

also durch Addition

$\cos\alpha \cos\alpha' +$

d. h. die Ebene des pa
zeugenden, wie behaupt

106. Zwei belie
loids, welche zu ent
liegen in derselben
Betrachten wir die

$\alpha - \lambda\beta$

$\alpha - \lambda'\delta$

so sind sie beide offenba

$$\frac{}{b}$$

$$- \cos\alpha \cos\alpha' = \cos\gamma \cos\gamma' + c$$

$$- \frac{c}{b} \cos\gamma' \cos\beta -$$

also durch Addition

$$\cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' + co$$

d. h. die Ebene des parabolischen Schnitt zeugenden, wie behauptet ist.

106. Zwei beliebige gerade Li loids, welche zu entgegengesetzten liegen in derselben Ebene.

Betrachten wir die beiden Linien

$$\alpha - \lambda\beta = 0, \quad \lambda\gamma - \delta =$$

$$\alpha - \lambda'\delta = 0, \quad \lambda'\gamma - \beta =$$

so sind sie beide offenbar in der Ebene

Linie des

s Φ,

iner durch

ene

$a^2 \cos^2 \frac{1}{2}(\Phi + \vartheta) +$

über, so dass

$a^2 + b^2$

ist: Oder *der* Ort d
naler Erzeug*enden* i
conc*entrischen* Kug

Beispiel. *Welches* ist
tes *der* Erzeugenden des Hy

$$\frac{x^2}{a^2} +$$

die *den* constanten Winkel φ
Wenn a' *die Centraldis*
zeich*net*, so kann die Gleich

$$\frac{x^2}{a'^2} +$$

darge*stellt* werden, und *man*

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}(\Phi + \theta)$$

über, so dass

$$a^2 + b^2 + c^2 = x'^2 + y'^2$$

ist: Oder der Ort der Durchschnitt
naler Erzeugenden ist der Schnitt de
concentrischen Kugel.

Beispiel. Welches ist der geometrische Ort
tes der Erzeugenden des Hyperboloids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

die den constanten Winkel φ mit einander einsch

Wenn a' die Centraldistanz eines Punktes
zeichnet, so kann die Gleichung des Hyperboloid

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - \frac{z^2}{c'^2} = 1$$

dargestellt werden, und man hat die Relationen

t, welche
die Fläche
ch eine
e legen,
in einer
n Punkte,
neidet.
he in jedem
iese Gerade,
eine andere.

so gültig bleibt,
rade sind. Wir
Tangentenebene

ist, so ergiebt sich g
in jedem Punkte der L

zusammenfällt.

Die Projectionen
einer Mantelfläche auf
sprechenden Hauptschn

108. Es ward im A
Linien, in welchen die
mit den Asymptoten de
Richtung sind. Da a
asymptotischen Kegels d
auf einem Hyperbo
Asymptotenkegels
nicht irgend drei
Ebene parallel sein
eine parallele Ebene dur

in jedem Punkte der Linie xy mit

$$x = 0$$

zusammenfällt.

Die Projectionen der geraden Linien einer Mantelfläche auf die Hauptebenen sin sprechenden Hauptschnitte.

108. Es ward im Artikel 104 gezeigt, Linien, in welchen die Tangentenebene ein mit den Asymptoten des parallelen Centra Richtung sind. Da aber diese Letztere asymptotischen Kegels der Fläche sind, so i auf einem Hyperboloid zu einer Asymptotenkegels parallel. Man erk nicht irgend drei solcher Gera Ebene parallel sein können, weil un eine parallele Ebene durch das Centrum de

vier
eich-

in der

zwischen
zwischen
Gleichung
(x', y', z')

geraden Linie
insbesondere
gende Gerade
t windschief
boloid mit einer
Klasse.

Ecken, von denen sie ausg
ihm auf dieser *Ebene* erric
und *ist der* vierten *parall*
Man hat so vier *Erzeugende*
tive *parallel* sind, und *leit*
ab. Dasselbe *liegt mit de*
Centrum der ihm umgeschr

110. *Wir* gehen hie
gabe: Die *durch ein*
schneidende bewegt
stimmen.

Zur möglichsten *Abk*
welche *Wahl* der Coordin
Gleichungen *der festen* g
sten *Form* zu geben. *Wi*
sten sein *muss*, die Achse

---

*) *Oder* auch Curven bel

und ist der vierten parallel, also eine Erzeug
Man hat so vier Erzeugende der zweiten Art, die
tive parallel sind, und leitet daraus das Centru
ab. Dasselbe liegt mit dem Schwerpunkt des
Centrum der ihm umgeschriebenen Kugel in ein

110. Wir gehen hiernach an die Lösu
gabe: Die durch eine drei feste g
schneidende bewegte Gerade erzeu
stimmen.

Zur möglichsten Abkürzung der Arbeit
welche Wahl der Coordinatenachsen am m
Gleichungen der festen geraden Linien in
sten Form zu geben. Wir erkennen sogleic
sten sein muss, die Achsen respective para

---

*) Oder auch Curven beliebiger Art.

geraden Linien zu wählen — eine Wahl, die nur in dem beim Hyperboloid mit einer Mantelfläche nach Artikel 108 nicht möglichen speciellen Falle nicht getroffen werden kann, wo die drei gegebenen Geraden einer und derselben Ebene parallel sind; wir wollen diesem Falle im nächsten Artikel eine besondere Untersuchung widmen. Dann kann nur noch die möglichst symmetrische Lage des Anfangspunktes der Coordinaten fraglich sein. Wir erhalten aber ein Parallelopiped, von welchem die gegebenen Linien Kanten sind, wenn wir durch jede der drei geraden Linien Ebenen legen, welche den jedesmaligen beiden andern parallel sind und erkennen im Centrum desselben jene möglichst symmetrische Lage des Anfangspnnktes; die durch dasselbe gehenden Parallelen zu jenen Geraden sind die Coordinatenachsen. Wenn

$$x = \pm a, \quad y = \pm b, \quad z = \pm c$$

die Gleichungen jener drei Paare von Ebenen sind, so werden durch

$$y = b, \; z = -c; \quad z = c, \; x = -a; \quad x = a, \; y = -b$$

die drei festen Geraden repräsentiert. Die Gleichungen einer die beiden ersten von ihnen durchschneidenden geraden Linie sind

$$z + c = \lambda (y - b), \quad z - c = \mu (x + a),$$

und dieselbe durchscheidet die dritte, wenn

$$c + \mu a + \lambda b = 0$$

ist; die Einführung der Werthe von λ und μ aus den vorigen Gleichungen giebt

$$c (x + a) (y - b) + a (y - b) (z - c) + b (z + c) (x + a) = 0$$

oder durch Reduction

$$ayz + bzx + cxy + abc = 0.$$

Durch Anwendung der Kriterien des Artikel 81 erkennen wir, dass diese Gleichung ein Hyperboloid mit einer Mantelfläche repräsentiert, wie auch schon daraus geschlossen werden kann, dass sie nach der Voraussetzung eine Regelfläche und nach ihrer Form eine Fläche zweiten Grades mit Centrum bezeichnet.

Die Auflösung der Aufgabe kann sodann in folgender Form gegeben werden.

$$\cos\alpha_i \qquad \cos\beta_i \qquad \cos\gamma_i$$

bezeichnen. Die Aufstellung der vier Bedi
Durchschnitts mit der Geraden

$$\frac{x - a}{\cos\alpha} = \frac{y - b}{\cos\beta} =$$

und die Elimination der sechs dadurch ei
schen ihnen liefert die Bedingungen in G
wie folgt. Ist

$$A_i = y_i \cos\gamma_i - z_i \cos\beta_i, \quad B_i = z$$
$$C_i = x_i \cos\beta_i - y_i$$

so ist die Bedingung

$$\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1, & \cos\alpha_1, & \cos\beta_1, \\ A_2, & B_2, & C_2, & \cos\alpha_2, & \cos\beta_2, \\ A_3, & B_3, & C_3, & \cos\alpha_3, & \cos\beta_3, \\ A_4, & B_4, & C_4, & \cos\alpha_4, & \cos\beta_4, \end{vmatrix}$$

age
rae-
venn
hend
onnen
n

und die durch dieselben E
genden des zweiten System

$$a_{34}\beta =$$
$$a_{14}\gamma =$$
$$a_{12}\delta =$$
$$a_{23}\alpha =$$

dargestellt. Man beweist vo
diese Sätze: Wenn die Eckp
boloidischen Geraden liegen,
entsprechender Tetraederflä
Durchschnittslinien entsprech
hyperboloidische Gerade sind
Ecken derselben auf vier hyp

---

*) Vergl. Cayley, „Quarter
**) Vergl. Hermes „Ueber h
r. u. a. Math.“ Bd. 56, p. 221.

genden des zweiten Systems sind dann durch

$$a_{34}\beta = a_{24}\gamma = a_{23}\delta,$$
$$a_{14}\gamma = a_{13}\delta = a_{34}\alpha,$$
$$a_{12}\delta = a_{24}\alpha = a_{14}\beta,$$
$$a_{23}\alpha = a_{13}\beta = a_{12}\gamma$$

dargestellt. Man beweist von diesen Gleichung
diese Sätze: Wenn die Eckpunkte zweier Tetr
boloidischen Geraden liegen, so sind auch di
entsprechender Tetraederflächen hyperboloid
Durchschnittslinien entsprechender Flächen z
hyperboloidische Gerade sind, so liegen auch
Ecken derselben auf vier hyperboloidischen

---

*) Vergl. Cayley, „Quarterly Journal“ Vol.

**) Vergl. Hermes „Ueber homologe Tetraed
r. u. a. Math.“ Bd. 56, p. 221.

Ecken
zeigt,
lche in
nte nor-
at damit

geraden Linien

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} =$$

Diese beiden Gleic
Linien in der *Fläche* pa
beiden festen Ebenen

sein *muss*, und diess be
zwischen den *geraden* I
boloids. (Vergl. Artikel 10
bewiesen, *dass* jede gera
dern durchschneidet, wäl
Systems sich nicht durch
Wir wenden uns hi
Problems, d. h. zur Bes
che durch eine län

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = \lambda, \quad \lambda \left(\frac{x}{a} \mp \frac{y}{b} \right.$$

Diese beiden Gleichungen zeigen, d
Linien in der Fläche parallel zu der einen
beiden festen Ebenen

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$$

sein muss, und diess bezeichnet eine wese
zwischen den geraden Linien des Parab
boloids. (Vergl. Artikel 108.) Im Uebrigen
bewiesen, dass jede gerade Linie des eine
dern durchschneidet, während zwei gerad
Systems sich nicht durchschneiden.

Wir wenden uns hiernach zur Auflö
Problems, d. h. zur Bestimmung derje
che durch eine längs dreier fes

Trans-

bene ist

$\alpha) = 0$

stellt, weil
reelle Fac-

ne Grenze
, für wel-
rer Lagen
sich diess auch

Wenn umgekehrt z
rade Linien in Reihen
gleichem Doppelschnittve
so sind die geraden Verb
der Reihen Erzeugende
Wir stellen die beid

$$\alpha = 0, \quad \beta$$

dar und denken sie durc

$$\alpha =$$

geschnitten; dann muss,

$$\alpha =$$

homographische Theilunge

erfüllt sein. Aus der Elimi

rade Linien in Reihen von Punkten hom
gleichem Doppelschnittverhältniss (projectiv
so sind die geraden Verbindungslinien ents
der Reihen Erzeugende eines Hyperboloids

Wir stellen die beiden gegebenen Ger

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0; \quad \gamma = 0,$$

dar und denken sie durch die feste Gerad

$$\alpha = \lambda' \beta, \quad \gamma = \mu' \delta$$

geschnitten; dann muss, damit eine belieb

$$\alpha = \lambda \beta, \quad \gamma = \mu \delta$$

homographische Theilungen in ihnen besti

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\mu}{\mu'}$$

erfüllt sein. Aus der Elimination von λ zw

$$\alpha = \lambda\beta, \quad \lambda'\gamma = \mu'\lambda\delta$$

folgt aber die Gleichung

$$\lambda'\beta\gamma = \mu'\alpha\delta$$

als Gleichung des Ortes.

Diese Gleichung oder nach der Division mit μ'

$$\alpha\delta = \varkappa\beta\gamma$$

enthält in der Bestimmung der vier Ebenen

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0$$

vier willkürliche Constanten, als Ausdruck der Unbestimmtheit der Beziehung dieser vier Ebenen zur Fläche. Sie ist in dem Satze ausgesprochen: Durch zwei Paare gegenüberliegender Kanten eines Tetraeders gehen unendlich viele Flächen zweiter Ordnung; in Bezug auf alle diese Flächen ist jede der beiden Kanten des dritten Paares die Polarlinie der andern. Von hier aus ist der Begriff eines Tetraeders leicht zu gewinnen, welches einer Fläche zweiten Grades zugleich eingeschrieben und umgeschrieben ist. Man kann dieselben drei Kantenpaare auch als Seiten und Diagonalen eines windschiefen Vierseits ansehen.

Beispiel. Die gerade Verbindungslinie der Mittelpunkte der Diagonalen dieses windschiefen Vierecks ist der Ort der Centra aller dieser Hyperboloide.

Wenn wir an Artikel 32 f. erinnern, so erhalten wir zugleich die folgende Interpretation derselben Gleichung: Der geometrische Ort solcher Punkte, für welche das Product der Entfernungen von zwei festen Ebenen zu dem Product ihrer Entfernungen von zwei andern festen Ebenen in constantem Verhältniss steht, ist eine Fläche zweiten Grades, welche die Durchschnittslinie der beiden ersten mit den beiden letzten Ebenen ganz enthält. Ein Punkt der Fläche, welcher in keiner von jenen Ebenen liegt, reicht zu ihrer Bestimmung weil zu der von $\varkappa$ hin. In der That ergänzt er die vier Ecken und die vier überdiess in den Seiten gegebenen Punkte des windschiefen Vierecks zu der Zahl von neun Punkten.

Man kann die Tangentenebene der Fläche in diesem Punkte leicht erhalten; er bestimmt mit jedem der beiden Gegenseiten-

paare

$$\alpha = 0,\ \beta + l = 0;\quad \delta = 0$$
$$\alpha = 0,\ \beta - l = 0;\quad \delta = 0$$

sind die Berührungspunkte der pa
ebenen in den Enden jenes Durchm

$$\alpha = 0,\quad \delta = 0$$

berühren die Fläche in unendlich

Wir wollen endlich nur noch eine Fo
Gleichung

$$\alpha\delta = \beta\gamma$$

— wir denken die Constante implicite —
geraden Linien

$$\alpha = 0,\ \gamma = 0;\quad (1)$$
$$\alpha = 0,\ \beta = 0;\quad (2)$$
$$\alpha = \beta,\ \delta = \gamma;\quad (3)$$

$$\delta = 0,\ \gamma = 0;\ (4)$$
$$\delta = 0,\ \beta = 0;\ (5)$$
$$\delta = \beta,\ \alpha = \gamma;\ (6)$$

liegen sämmtlich auf der Fläche und bestimmen jede mit der nächstfolgenden sechs Ebenen, die wir zu Paaren geordnet darstellen, wie folgt:

$$\alpha = 0;\ (12) \quad \alpha = \beta;\ (23) \quad \delta = \gamma;\ (34)$$
$$\delta = 0;\ (45) \quad \delta = \beta;\ (56) \quad \alpha = \gamma.\ (61)$$

Aus der Bemerkung, dass durch Subtraction der übereinanderstehenden Gleichungen dieser Gruppe gleichmässig

$$\alpha = \delta$$

erhalten wird, schliessen wir den Satz: Die drei Paare von Ebenen, welche durch je ein Paar benachbarter Seiten eines auf einer Fläche zweiten Grades gelegenen Sechsseits und die ihnen gegenüberliegenden bestimmt sind, schneiden sich in drei geraden Linien in derselben Ebene.

113. Dem Falle, wo die Ebene

$$\gamma = 0$$

unendlich entfernt ist, somit ihr analytischer Ausdruck auf eine Constante und die Gleichung der Fläche auf die Form

$$\alpha\delta = \varkappa\beta$$

reduciert wird, entspricht das hyperbolische Paraboloid. Die Ebene γ ist mit den beiden Geraden

$$\alpha = 0,\ \gamma = 0;\quad \delta = 0,\ \gamma = 0$$

in unendlicher Entfernung und das Viereck auf die beiden Geraden

$$\alpha = 0,\ \beta = 0;\quad \delta = 0,\ \beta = 0$$

reduciert. Die so gegebene Gleichung enthält zwei überschüssige Constante, die beiden Ebenen

$$\alpha = 0,\quad \delta = 0$$

stehen also in einer Beziehung zur Fläche, welche sie mit einem beliebigen Paare ihrer parallelen Ebenen gemein haben; die Richtung ihrer Durchschnittslinie aber ist die der Durchmesser des hyperbolischen Paraboloids. Nehmen wir eine Tangentenebene der Fläche

sich dasselbe dadurch auf ein einfaches V

Wenn umgekehrt zwei begren
schneidende gerade Linien in glei
cher Theile getheilt werden, so sin
bindungslinien entsprechender Pu
lungen die Erzeugenden eines hyp
boloids. Man kann hiernach, wie au
Hyperboloids mit einer Mantelfläche, die
durch gespannte Fäden dem Auge anschau

Um diess hinsichtlich des hyperboliso
zu beweisen, denken wir die gerade Linie
chende Endpunkte der Geraden verbindet
die Achsen der y und der z als eben d
zugleich* so, dass die Ebene xy die Entf
halbiert. Sind dann die Längen der gege
so sind die Coordinaten zweier entsprech

* Wenn die x-Axe und die
[illegible] xy [illegible]

Ji Ta

t die
, für
ugen-
einer
nend-
rn Ge-
Durch-

Parallelen,
gegebenen
ches Para-

r innerhalb
bindung der

eugende der-
che derselben

sind, *nur* verschwinde
füllt sind, die *man* dur

Es handelt sich
einer Transformat

$$ax^2 + by^2 +$$

$$= A\,(X^2 + Y$$

erfüllt wird. Wege

$$x^2 + y^2 + z^2$$

wird dann, *für*

die Grösse

$$(ax^2 + by^2 +$$

$$- \lambda\,(x^2 + y^2 +$$

ein *voll*kommenes Quadr
stellen, *unter denen* die

lunt sind, die man durch das folgende Ver

Es handelt sich um die Frage na
einer Transformation, durch welc

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2lyz +$$
$$= A\,(X^2 + Y^2) + CZ^2$$

erfüllt wird. Wegen

$$x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 +$$

wird dann, für

$$\lambda = A,$$

die Grösse

$$(ax^2 + by^2 + cz^2 + 2lyz +$$
$$- \lambda\,(x^2 + y^2 + z^2) = (C - A)$$

ein vollkommenes Quadrat und man hat
stellen, unter denen diess stattfindet.

ntiert,

so eben
schwin-
leder in
Quadrat
er einen
von zwei
e Flächen
ede Normale
m Falle und

Beispiel. Wann wir
chende Tangentencylinder

$$\frac{x^2}{a^2}$$

dessen Gleichung ist

$$\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^2}\right.$$

ein Rotationscylinder?

116. Die vorhergeh
kung abgeleitet werden,
das Problem der Be
unbestimmte Aufgab

Denn da jeder zur U
ist, so wird jedes System
jenige die Umdrehungsac
den zu diesen Sehnen no

chende Tangentencylinder des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

dessen Gleichung ist

$$\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) =$$

ein Rotationscylinder?

116. Die vorhergehende Theorie kann
kung abgeleitet werden, dass für eine
das Problem der Bestimmung der
unbestimmte Aufgabe wird.

Denn da jeder zur Umdrehungsachse no
ist, so wird jedes System paralleler Sehne
jenige die Umdrehungsachse enthaltende E
den zu diesen Sehnen normalen Durchmess

icht

kel 13
allge-
ltat in
d beider
urch den
onen der
sind ihre

$x)^2$
n^2

constanten Ver-

Beispiel 4. Bestim
durch eine um eine fes
sich drehende gerade L
Sei die feste Linie die
Erzeugenden durch

$$x = mz$$

ausgedrückt. Da nun jeder P
beschreibt, dessen Ebene de
Punkte eines solchen ebenen

d. i. in Function von z

$$(mz +$$

constant; die Gleichung der fr

$$x^2 + y^2 = ($$

und sie ist also ein Umdrehung

Beispiel 5. Zwei durc
naten gehende Gerade b
dass sie stets rechtwink
ist die Gleichung der K

durch eine um eine feste sie nicht durch
sich drehende gerade Linie erzeugt wir

Sei die feste Linie die Achse der z und e
Erzeugenden durch

$$x = mz + n, \quad y = m'z +$$

ausgedrückt. Da nun jeder Punkt der sich drehen
beschreibt, dessen Ebene derjenigen der xy par
Punkte eines solchen ebenen Schnittes der Werth

$$x^2 + y^2,$$

d. i. in Function von z

$$(mz + n)^2 + (m'z + n')$$

constant; die Gleichung der fraglichen Fläche ist

$$x^2 + y^2 = (mz + n)^2 + (m'z$$

und sie ist also ein Umdrehungshyperboloid mit e

Beispiel 5. Zwei durch den Anfangs
naten gehende Gerade bewegen sich in
dass sie stets rechtwinklig zu einande
ist die Gleichung der Kegelfläche, di

eit ist

Werthe
t einer

anderen
inien so,
von einem
Winkel er-
ntelfläche
en gegebe-

es, von dem

Beispiel 6.

nen durch einen Punkt
so bestimmt die Ebene ih
in der Normale ihres A
Punktes für alle Lagen d
ein concentrisches coax

Für

$$ax^2 + by^2 + cz^2$$

als Gleichung der Fläche ist
Tangentenebene als Ebene xy
gesetzt. Ist dann

$$a'x +$$

die Ebene der drei Punkte, so

$$d' (ax^2 + by^2 + cz^2 + 2lyz$$

die Gleichung einer durch die
dem Anfangspunkte beschrieben
der sie drei zu einander normal

$$d' (a + b$$

oder

o bestimmt die Ebene ihrer Endpunkte e
n der Normale ihres Anfangspunktes u
unktes für alle Lagen des Letzteren auf
in concentrisches coaxiales Ellipsoid.

Für

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2lyz + 2mzx +$$

ls Gleichung der Fläche ist der gedachte Punkt al
angentenebene als Ebene xy und seine Normale al
esetzt. Ist dann

$$a'x + b'y + c'z = d'$$

ie Ebene der drei Punkte, so ist

$$' (ax^2 + by^2 + cz^2 + 2lyz + 2mzx) + 2rz (a$$

ie Gleichung einer durch die Schnittcurve dersel
em Anfangspunkte beschriebenen Kegelfläche und
er sie drei zu einander normale Erzeugende besitz

$$d' (a + b + c) + 2rc' = 0$$

der

ungen

des Ortes

= 1,

ie Hauptebenen

ses giebt für den Kegel

$$(x'z - xz')^2 +$$

Für

$$x' =$$

— oder den Scheitel des Kege
man die Gleichung eines aus e
Kreises. Die Normalebenen zu
daher die Ebenen der Kreisschn

Beispiel 12. Die Gleich
aus dem Scheitel $(x', y', z'$
nen Kegelschnitt

$$\frac{x^2}{a^2}$$

beschrieben wird.

Die Gleichungen der gera
der Basis mit dem Scheitel sind

$$\alpha(z' - z) = z'x -$$

$$(x'z - xz')^2 + (y'z - yz')^2 = a^2$$

Für

$$x' = 0 \quad \text{und} \quad y' = 0$$

— oder den Scheitel des Kegels im Hauptschnitt
man die Gleichung eines aus einem Punkte der Ach
Kreises. Die Normalebenen zur Achse der z und d
daher die Ebenen der Kreisschnitte.

Beispiel 12. Die Gleichung des Kegels
aus dem Scheitel (x', y', z') über dem in de
nen Kegelschnitt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

beschrieben wird.

Die Gleichungen der geraden Verbindungslin
der Basis mit dem Scheitel sind

$$\alpha(z' - z) = z'x - zx', \quad \beta(z' - z) =$$

ngslinie von
rden aus der
Null erhalten
er Fläche V
nur für eine
nter der Vor-
einer durch
ächen schnei-

ie kleinste
en aus den
beschrie-

^{2}
Σ;

ebene und
itt; diese
rschnitte,

für

in $r = (\alpha^2 + \beta^2 +$

$\Sigma c_i \frac{\alpha_i}{}$

also für

in $a = \Sigma_1^n c_i \frac{A_i}{r_i}$,

$\frac{a\alpha}{}$

über. Sie ist identisch mit

$$\frac{\alpha \frac{a}{c} + \beta \frac{b}{c}}{r \sqrt{\left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}\right.}}$$

oder

für

$$r = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{\frac{1}{2}}, \quad r_i = (A_i^2 +$$

in

$$\Sigma c_i \frac{\alpha A_i + \beta B_i + \gamma C_i}{r r_i} =$$

also für

$$a = \Sigma_1^n c_i \frac{A_i}{r_i}, \quad b = \Sigma_1^n c_i \frac{B_i}{r_i}, \quad c$$

in

$$\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{r} = k$$

über. Sie ist identisch mit

$$\frac{\alpha \frac{a}{c} + \beta \frac{b}{c} + \gamma}{r \sqrt{\left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} + 1\right)}} = \frac{}{\sqrt{a^2}}$$

oder

ent-

it dem

enten-
ine an-

ng auszu-
ug auf die
ikel 75 ge-

nen Ebenen,
ne; die Tan-
Summen, die

und die Substitution in

Lx'

giebt nach Division mit ϱ^2

x

als die fragliche Gleichung.
beiden Kegelflächen eine rec
normal sind zu den Tange
wie diess Problem einen spe
Wenn die Gleichung de

$$ax^2 + by^2 + cz^2$$

gegeben ist, so wird die des

$$(bc - d^2)\,x^2 + (ca - e^2)\,y^2$$
$$+ 2(ef - ad)\,y$$

gefunden, übereinstimmend m
Planimetrie.

und die Substitution in

$$Lx'^2 + My'^2 + Nz'^2 =$$

giebt nach Division mit ϱ^2

$$\frac{x^2}{L} + \frac{y^2}{M} + \frac{z^2}{N} = 0$$

als die fragliche Gleichung. Ihre Form zeigt, das beiden Kegelflächen eine reciproke ist und dass als normal sind zu den Tangentenebenen des zweite wie diess Problem einen speciellen Fall des vorhe

Wenn die Gleichung des Kegels in der Form

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx +$$

gegeben ist, so wird die des Reciprocalkegels in

$$(bc - d^2)\,x^2 + (ca - e^2)\,y^2 + (ab - f^2)\,z^2 + 2(ef - ad)\,yz + 2(fd - be)\,zx$$

gefunden, übereinstimmend mit der der Reciproc

Planimetrie.

Beispiel 19. Eine gerade Linie bewegt sich so, dass drei feste Punkte in ihr in drei festen Ebenen bleiben; welches ist der von einem beliebigen Punkte dieser Linie durchlaufene Ort?

Wir denken die drei festen Ebenen als Coordinatenebenen und als von der geraden Linie in den Punkten A, B, C geschnitten und nennen die Coordinaten des betrachteten Punktes α, β, γ. Die Coordinaten von A sind alsdann

$$0, \quad \frac{AB}{PB}\beta, \quad \frac{AC}{PC}\gamma,$$

wo die Verhältnisse $AB : PB$ und $AC : PC$ bekannt sind. Indem wir dann nach Artikel 10 die Unveränderlichkeit der Distanz PA ausdrücken, erkennen wir als die Ortsfläche ein Ellipsoid.

Wenn der Punkt P eine der Strecken AB, BC, CA halbiert, so ist der Ort speciell ein Rotationsellipsoid.

Es ist ein specieller Fall dieses Problems, wenn der eine Endpunkt der Geraden in einer festen Ebene, der andere in einer festen Geraden sich bewegen muss; die Letztere ist der Durchschnitt zweier Ebenen, und die zwischen beiden auf der bewegten Geraden gelegene Strecke ist Null. Der entsprechende Ort ist ein Rotationsellipsoid, wenn die feste Gerade zur festen Ebene normal ist, und insbesondere eine Kugel, wenn der Punkt P die Gerade halbiert.

Beispiel 20. Von zwei festen Punkten A und O ist der eine auf einer Kugelfläche gelegen; die Verbindungslinie DA eines beliebigen andern Punktes D der Kugelfläche mit A schneidet die Kugel ferner in dem Punkte D'; man soll den Ort des Punktes P auf OD bestimmen, für welchen $OP = AD'$ ist.

Wir haben

$$AD^2 = AO^2 + OD^2 - 2AO \,.\, OD \,.\, \cos AOD,$$

und in dieser Gleichung ist AD dem Radius vector des Ortes umgekehrt proportional und OD ist durch die Gleichung der Kugel in Function der Winkel bestimmt, welche sie mit festen Achsen bildet. Daraus erkennt man den Ort als eine Fläche zweiter Ordnung vom Centrum O.

Beispiel 21. Der Ort eines Punktes P, dessen Verbindungslinie mit einem gegebenen Punkte O in einer festen Ebene einen Punkt Q so bestimmt, dass die Relation

$$OP \,.\, OQ = k^2$$

stattfindet (k eine Constante), ist eine Kugelfläche.

Beispiel 22. Eine Ebene geht stets durch eine feste gerade Linie und ihre jedesmaligen Durchschnittslinien mit zwei festen Ebenen sind mit einem festen Punkte durch Ebenen verbunden; welches ist die durch die Durchschnittslinie der beiden letzteren Ebenen erzeugte Fläche?

also

$$A\,(ux_1 - u_1x) + B\,(uy_1 - u_1y) + C\,(uz_1 - u$$

ebenso die beiden andern. Die Elimination von A
vier so erhaltenen Gleichungen giebt

$$\begin{vmatrix} x_0 & , & y_0 & , & z_0 \\ ux_1 - u_1x, & & uy_1 - u_1y, & & uz_1 - u_1z \\ vx_2 - v_2x, & & vy_2 - v_2y, & & vz_2 - v_2z \\ wx_3 - w_3x, & & wy_3 - w_3y, & & wz_3 - w_3z \end{vmatrix}$$

eine Gleichung dritten Grades, als die Gleichung
sie in die Form

$$\begin{vmatrix} 1 & , & x & , & y & , & z & , & 1 \\ 0 & , & x_0 & , & y_0 & , & z_0 & , & 1 \\ u_1 & , & ux_1 & , & uy_1 & , & uz_1 & , & u \\ v_2 & , & vx_2 & , & vy_2 & , & vz_2 & , & v \\ w_3, & & wx_3, & & wy_3, & & wz_3, & & w \end{vmatrix} =$$

transformiert und für

n ersten

Tetra-
tossen-
e durch
ken sich

n Punkt
aden Li-
en gera-
s Durch-

me gehen
h alle bis
der letz-

Beispiel 27. Die Seiten eines Polygons im Raume gehen, eine einzige ausgenommen, durch feste Punkte, die Endpunkte dieser letzten Seite bewegen sich in festen geraden Linien, alle andern Ecken des Polygons aber in festen Ebenen; man soll die durch die freie Seite erzeugte Fläche untersuchen.

Beispiel 28. Die Ecken eines Dreiecks bewegen sich auf einer Fläche zweiten Grades, während zwei seiner Seiten durch feste Punkte gehen; die Enveloppe seiner freien Seite ist eine Fläche zweiten Grades, welche die gegebene doppelt berührt, wo die Verbindungslinie der beiden festen Punkte sie schneidet. Wenn die erste der beiden Flächen eine Kugel ist, so sind die Berührungspunkte die Kreispunkte der zweiten. (Vergl. „Analyt. Geom. d. Kegelschn.“ Artikel 302, Aufg. 2.)

ci-
tät
402,
hne
Geo-
s um
ieser
r Al-
meine
Resul
ureihen.
wir hier
keit über-
rs zu be-
örterun-

eine Fläche
richt eine

zugleich Tangenten
erzeugten abwickel

Die Bildung de
Stelle der Reihen von
Reihen von Ebenen, Li
Reihe von Punkten, we
her eine Reihe von E
rühren.

Wenn die Curve
enthalten ist, so g
sämmtlich durch ei
tenebenen einer Ke

So bildet die Reihe
gemeinsam sind, eine C
Reihe der Tangenteneben
sind, eine abwickelbare
umhüllt.

erzeugten abwickelbaren Fläche sin

Die Bildung des reciproken Sy
Stelle der Reihen von Punkten, Linien und
Reihen von Ebenen, Linien und Punkten; d
Reihe von Punkten, welche eine Curve im
her eine Reihe von Ebenen, die eine d
rühren.

Wenn die Curve jener Punkte g
enthalten ist, so gehen die Ebene
sämmtlich durch einen Punkt und
tenebenen einer Kegelfläche.

So bildet die Reihe der Punkte, welc
gemeinsam sind, eine Curve im Raume;
Reihe der Tangentenebenen, welche zwei
sind, eine abwickelbare Fläche berührt, we
umhüllt.

rpre-
laten,
haten.
mung
beide
schei-
ationen
gebrau-
zweiter

ertragung
stem der

tikel 313 f.

zwei Flächen zweiten
Punkte hindurchgeht,

eine Fläche derselben
enthält, und die Const
Fläche durch einen b
sie mit irgend einer
Fläche zweiten Grades
Alle durch acht
haben somit eine ganze
eine Durchdringungs-

---

*) Der allgemeinere A
Flächen und Tangentene
überall dem eingeschränkt
lichen Curve tritt die dev
Tangentenebenen übergeh

Punkte hindurchgeht, so wird durch

$$U + \lambda V = 0$$

eine Fläche derselben Art vorgestellt, die
enthält, und die Constante λ kann so besti
Fläche durch einen beliebigen neunten P
sie mit irgend einer beliebigen die acht
Fläche zweiten Grades zusammenfällt.

Alle durch acht Punkte gehende Flä
haben somit eine ganze Reihe gemeinschaft
eine Durchdringungs- oder Durchschnittsc

---

*) Der allgemeinere Ausdruck Elemente, in
Flächen und Tangentenebenen derselben zusa
überall dem eingeschränkteren substituiert werd
lichen Curve tritt die developpable Fläche, we
Tangentenebenen übergeht.

Flächen zweiten Grades, welche acht gegebene Ebenen berühren, haben eine ganze Reihe gemeinschaftlicher Tangentenebenen, welche eine bestimmte abwickelbare Fläche erzeugen, die die ganze Reihe von Flächen zweiten Grades umhüllt, denen die acht festen Ebenen als Tangentenebenen entsprechen.

Offenbar kann daher das Problem, eine Fläche zweiten Grades durch neun gegebene Punkte zu beschreiben, unbestimmt werden; denn wenn der neunte Punkt der durch die acht gegebenen Punkte bestimmten Raumcurve angehört, die der Durchschnitt von zwei durch sie gehenden Flächen zweiten Grades ist, so enthält jede durch die acht Punkte gehende Fläche zweiten Grades auch den neunten Punkt. Zur Bestimmung der Fläche muss daher ein neunter nicht in dieser Curve gelegener Punkt gegeben sein.

Denn wenn im Allgemeinen für

$$U = 0, \quad V = 0$$

als Gleichungen zweier durch acht bestimmte Punkte gehenden Flächen zweiten Grades durch die Substitution der Coordinaten eines neunten Punktes in

$$U + \lambda V = 0$$

die Constante λ bestimmt wird, so geschieht diess in dem speciellen Falle nicht mehr, wo durch diese Coordinaten die Gleichungen

$$U = 0, \quad V = 0$$

identisch erfüllt sind, d. i. wenn der neunte Punkt der Durchschnittscurve jener Flächen angehört.

121. Wenn sieben Punkte (oder Tangentenebenen) als einer Reihe von Flächen zweiten Grades gemeinsam gegeben sind, so ist ein achter diesen Flächen gemeinsamer Punkt (eine achte gemeinschaftliche Tangentenebene) durch sie bestimmt.

Denn wenn

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0$$

drei durch jene sieben Punkte gehende Flächen zweiten Grades darstellen, so wird durch

$$U + \lambda V + \mu W = 0$$

eine beliebige andere diese Punkte enthaltende Fläche zweiten Grades ausgedrückt, weil die Constanten λ und μ so bestimmt

122. Wenn ein System von Flächen zweiten Grades eine gemeinschaftliche Durchschnittscurve hat, d. i. wenn die Flächen desselben acht Punkte gemein haben, so gehen die Polarebenen eines festen Punktes in Bezug

chen zwe
developpal
ben ist, d
desselben
gentenebe
Ort der P

---

*) Die Entwickelung der auf Flächen belieb
allgemeinen Theorie entspricht ganz der für
(Vergl. Salmon, „Treatise on the higher plane Cu
Plücker, „Theorie der algebraischen Curven
eine Anzahl von Punkten gegeben ist, die um
Zahl der zur Bestimmung einer Fläche n^{ten} Grad
dadurch eine Curve bestimmt, durch welche di
die Zahl der gegebenen Punkte um zwei gering
eine gewisse Anzahl anderer Punkte der Fläche
viel, als zu der Anzahl n^3 noch fehlen.

ra-
rve
ble
ren
iner

so liegt

en Gra-
ve hat,
e Raum-

ngen
$= 0$

durch sieben gegeben
gehenden Flächen zweit
des gehen durch einen b
ten festen Punkt.

Denn die Gleichung
zug auf eine der durch d

$$U +$$

dargestellten Flächen ist

$$P +$$

und enthält daher den fes

$$P = 0,$$

sich schneiden *).

---

*) Aus diesem Satze ist v
gegebene Punkte gehenden
„Crelle's Journal“ Bd. XXI
Journ.“ Vol. IV, p. 44. Man v
Problem, welche Townsend

des gehen durch einen bestimmten festen Punkt.

liegen in e

Denn die Gleichung der Polare eines f
zug auf eine der durch die allgemeine Gleic

$$U + \lambda V + \mu W = 0$$

dargestellten Flächen ist von der Form

$$P + \lambda Q + \mu R = 0$$

und enthält daher den festen Punkt, in wel

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R =$$

sich schneiden *).

---

*) Aus diesem Satze ist von Hesse eine Cons
gegebene Punkte gehenden Fläche zweiten Gra
„Crelle's Journal“ Bd. XXIV, p. 36. „Cambrid
Journ.“ Vol. IV, p. 44. Man vergleiche die Entwic
Problem, welche Townsend gab, ibid. Vol. IV,

n Po-
Curve
Ebene

chen die

nanten
in Bezug
es, welche
eben sind,

bezeichneten biquadratisc
Paar der Flächen zweiten
Invarianten sind.

128. Wenn zwei F
Berührungspunkt ein
schnittscurve.

Denn im Allgemeinen
m^{ten} und n^{ten} Grade in ei
einer Curve, welche mit e
gemein hat. Jedem Punkt
einzige bestimmte Tangent
schnittslinie der Tangentene
denn jede durch diese Linie
in zwei sich berührenden
menfallende Punkte der Du

---

*) Vergl. „Anal. Geom. d.
Salmon, Anal. Geom. d. Raumes.

Paar der Flächen zweiten Grades, auf welch
Invarianten sind.

128. Wenn zwei Flächen sich ber
Berührungspunkt ein Doppelpunkt
schnittscurve.

Denn im Allgemeinen durchschneiden si
m^{ten} und n^{ten} Grade in einer Curve vom m
einer Curve, welche mit einer Ebene im All
gemein hat. Jedem Punkte der Durchschnitts
einzige bestimmte Tangente dieser Letzteren,
schnittslinie der Tangentenebenen beider Fläch
denn jede durch diese Linie gehende Ebene
in zwei sich berührenden Curven, geht also
menfallende Punkte der Durchschnittscurve.

---

*) Vergl. „Anal. Geom. d. Kegelschnitte“ Arti

chen sich berühren, so werden sie von jeder durch den Berührungspunkt gehenden Ebene in zwei sich berührenden Curven geschnitten und jede solche Ebene geht daher durch zwei zusammenfallende Punkte der Durchschnittscurve. Der Berührungspunkt ist somit ein Doppelpunkt in dieser Curve.

In Folge dessen entsprechen ihr, ganz analog dem Falle ebener Curven, zwei Tangenten in diesem Punkte. Denn in der gemeinschaftlichen Tangentenebene beider Flächen giebt es zwei gerade Linien von solcher Lage, dass jede durch eine von ihnen gehende Ebene die Flächen in Curven durchschneidet, die drei gemeinschaftliche Punkte im Berührungspunkt besitzen, oder einander osculieren.

Wir nehmen die Tangentenebene zur Ebene xy und denken die Gleichungen der Flächen in der Form

$$z + ax^2 + 2nxy + by^2 + \text{etc.} = 0,$$
$$z + a'x^2 + 2n'xy + b'y^2 + \text{etc.} = 0$$

gegeben; dann schneidet eine Ebene

$$y = \mu x$$

diese Flächen in Curven, welche einander osculieren, wenn die Bedingung

$$a + 2n\mu + b\mu^2 = a' + 2n'\mu + b'\mu^2$$

erfüllt ist*). Die beiden bezeichneten geraden Linien sind daher durch die Gleichung

$$(a - a')\, x^2 + 2\,(n - n')\, xy + (b - b')\, y^2 = 0$$

bestimmt, wie diess auch in anderer Art leicht bewiesen werden kann.

Wenn die Gleichung einer Fläche in der Form

$$u_1 + u_2 + u_3 + \text{etc.} = 0$$

geschrieben ist, wo u_i die Vereinigung derjenigen Glieder bezeichnet, welche in den Veränderlichen vom Grade i sind, so liegt der Anfangspunkt der Coordinaten in der Fläche und die Ebene

$$u_1 = 0$$

enthält alle die geraden Linien, welche im Anfangspunkt zwei zusammenfallende Punkte mit der Fläche gemein haben; wenn aber u_1 mit Null identisch ist, so hat die Fläche im Anfangspunkt

---

*) Vergl. „Anal. Geom. d. Kegelschnitte“ Artikel 241.

einen Doppelpunkt und alle geraden Linien, welche die Fläche in drei auf einanderfolgenden Punkten schneiden, sind in der Kegelfläche zweiten Grades

$$u_2 = 0$$

enthalten.

In dem hier betrachteten Falle erhalten wir nun durch Subtraction der einen Gleichung von der andern den Ausdruck einer die Durchschnittscurve enthaltenden Fläche, nämlich

$$(a - a')\,x^2 + 2\,(n - n')\,xy + (b - b')\,y^2 + \text{etc.} = 0,$$

in welcher der Anfangspunkt ein Doppelpunkt ist und die beiden so eben betrachteten Geraden diejenigen geraden Linien sind, welche die Fläche in drei zusammenfallenden Punkten schneiden.

129. Das Zusammenfallen dieser Linien bedingt die Existenz einer Spitze, oder eines stationären (Cuspidal-) Punktes in der Durchdringungscurve im Anfangspunkt, und wir wollen in diesem Falle die zwischen beiden Flächen stattfindende Berührung als eine stationäre bezeichnen.

Die algebraische Bedingung derselben ist unter den vorher gemachten Voraussetzungen über die Lage der Coordinatenachsen die Relation

$$(a - a')\,(b - b') = (n - n')^2.$$

Die Anschauung der biquadratischen Gleichung des Artikel 127 zur Bestimmung von λ zeigt sofort, dass unter dieser Bedingung drei Wurzeln derselben den Werth -1 haben; denn in dem untersuchten Falle ist nach der Form der untersuchten Gleichungen auch

$$r = r'.$$

Die Bedingungen einer stationären Berührung werden somit erhalten, indem man die Relationen aufstellt, welche die Coefficienten einer biquadratischen Gleichung erfüllen müssen, damit dieselbe drei gleiche Wurzeln habe; sie sind

$$S = 0, \quad T = 0,$$

wenn wir durch S und T die bekannten beiden Invarianten biquadratischer Formen bezeichnen, welche in den Coefficienten vom zweiten und vom 3. Grade sind ($J_{4,2}$ und $J_{4,3}$).*)

---

*) Vergl. „Vorlesungen“ Artikel 138. „Elemente“ Artikel 23, p. 204.

130. Da die Bedingung, unter welcher eine Fläche zweiten Grades eine Ebene berührt, nach Artikel 75 in den Coefficienten der Gleichung derselben vom dritten Grade ist, so ergiebt sich, dass unter den Flächen eines einfachen Systems mit gemeinschaftlicher Durchschnittscurve drei sind, welche eine gegebene Ebene berühren; und reciprok unter den Flächen eines einfachen Systems mit einer gemeinschaftlich umschriebenen developpabeln Fläche drei, welche durch einen gegebenen Punkt gehen.

Dagegen ist offenbar, dass im ersten Falle nur eine Fläche des Systems durch einen gegebenen Punkt geht und im zweiten Falle nur eine Fläche des Systems eine gegebene Ebene berührt.

In jedem Falle existieren zwei Flächen des Systems, welche eine gegebene gerade Linie berühren; denn die im Artikel 76 gegebene Bedingung, unter welcher eine Fläche zweiten Grades eine Gerade berührt, enthält die Coefficienten der Gleichung der Fläche nur im zweiten Grade.

131. Es ist auch geometrisch evident, dass unter den Flächen eines einfachen Systems mit gemeinschaftlicher Durchschnittscurve nur drei eine gegebene Ebene berührende gefunden werden können. Denn diese Ebene schneidet die gemeinschaftliche Durchschnittscurve in vier Punkten, welche den Durchschnittslinien der Ebene mit den Flächen des Systems gemeinschaftlich sein müssen. Da nun die Tangentenebenen einer Fläche zweiten Grades dieselbe in zwei reellen oder imaginären geraden Linien durchschneidet (Artikel 104), so können diese Geraden in unserm Falle nur die drei Paare von geraden Linien sein, welche durch jene vier Punkte bestimmt sind. Die Berührungspunkte der drei fraglichen Flächen mit der Ebene, d. i. die drei Durchschnittspunkte der betrachteten Linienpaare, sind die drei Punkte, welche in Bezug auf alle Kegelschnitte des einfachen durch vier feste Punkte gehenden Systems sich selbst conjugiert sind, d. h. von denen jeder die gerade Verbindungslinie der beiden andern in Bezug auf alle Kegelschnitte des Systems zu seiner Polare hat.*) Wenn man den Scheitel eines der vier Kegel des Systems durch gerade Linien

---

*) Vergl. „Analyt. Geom. d. Kegelschnitte“ Artikel 370, 400 und Zusatz p. 602.

nien, welche das Centrum mit den P
verbinden, ist jede rechtwinklig zu

133. Wenn zwei Flächen zwei
zwei Punkten berühren, so zerfällt i
curve, im allgemeinen Fall eine C
Krümmung vierten Grades, in zwei e
Denn wenn wir eine Ebene durch beide
einen beliebigen Punkt der Schnittcurve le
selbe die Flächen des Systems in Curven, v
zugleich die zwei Tangenten gemein haben
ungspunkten entsprechen, und die somit i

Die Gleichungen zweier solcher Fläch

$$S = 0, \quad S + LM =$$

wenn

$$L = 0, \quad M = 0$$

die Ebenen der Schnittcurven repräsentier

stems in
aben, in

durchschneiden, zu
Ebenen der andern
ander gemein haben
Denn die Flächen

$$S + LM$$

bestimmen mit einander

$$L =$$

gegeben sind.

Die ähnlichen
zu der eben discu
zweiten Grades sind —
zweiten Grades gebrauch
ähnlich gelegen, wenn
Gleichungen derselben üb

---

*) Vergl. „Analyt. Geo

Ebenen der andern Curve, welche
ander gemein haben.

Denn die Flächen

$$S + LM = 0, \quad S + LN$$

bestimmen mit einander ebene Schnitte, we

$$L = 0, \quad M - N =$$

gegeben sind.

Die ähnlichen Flächen zweite
zu der eben discutierten Klasse.
zweiten Grades sind — die bei der Betrach
zweiten Grades gebrauchten Gründe beweise
ähnlich gelegen, wenn die Glieder vom
Gleichungen derselben übereinstimmen. Der

---

*) Vergl. „Analyt. Geom. der Kegelschnitt

dieser Bedingungen ist in der Existenz des Aehnlichkeitscentrums, dem Parallelismus der Achsen und ihrer Verhältnissgleichheit ausgesprochen. Ihre Gleichungen sind also von der Form

$$S = 0, \quad S + c\,L = 0.$$

Wir sehen daraus, dass zwei solche Flächen zweiten Grades einander in einer ebenen Curve durchschneiden, während die Ebene der andern Durchschnittscurve in unendlicher Entfernung ist. Wenn wir drei ähnliche und ähnlich gelegene Flächen zweiten Grades betrachten, so gehen die drei Ebenen ihrer endlichen Durchschnittscurven durch dieselbe gerade Linie. Endlich besitzen die sechs Ebenen der Durchschnittscurven von vier solchen Flächen einen gemeinschaftlichen Punkt. Wenn die Scheitel der Tangentenkegel einer Fläche zweiten Grades eine ähnliche und ähnlich gelegene Fläche durchlaufen, so durchschneiden sich je zwei derselben in ebenen Curven.

Alle Kugeln sind ähnliche und ähnlich gelegene Flächen zweiten Grades; es ist die Consequenz dieser ihrer Natur, dass sie einen gemeinschaftlichen Durchschnitt in unendlicher Entfernung haben, einen Durchschnitt, welcher offenbar ein imaginärer Kreis ist.

Ein ebener Querschnitt einer Fläche zweiten Grades ist ein Kreis, wenn diejenigen zwei Punkte, in welchen seine Ebene diesen unendlich entfernten imaginären Kreis schneidet, ihm angehören.

Wir können daraus direct die Zahl der Auflösungen erkennen, deren das Problem der Bestimmung der Kreisschnitte einer Fläche zweiten Grades fähig ist.

Denn die Schnittcurve der Fläche zweiten Grades mit der unendlich entfernten Ebene wird von der Schnittcurve einer Kugel mit derselben Ebene in vier Punkte geschnitten, welche durch sechs gerade Linien verbunden werden können; die durch irgend eine dieser Geraden gehenden Ebenen schneiden die Fläche zweiten Grades in Kreisen. Die sechs geraden Linien theilen sich in drei Paare, von denen jedes einen der drei Punkte als seinen Durchschnittspunkt bestimmt, welche in Bezug auf die Durch-

schnittscurve der Fläche zweiten Grades und die der Kugel dieselbe Polare haben. Diese drei Punkte bestimmen die Richtungen der Achsen der Fläche zweiten Grades.

Eine Umdrehungsfläche ist diejenige Fläche zweiten Grades, welche mit einer Kugel eine doppelte Berührung in unendlicher Entfernung hat. Denn eine Gleichung von der Form

$$x^2 + y^2 + az^2 = b$$

kann in der Form

$$(x^2 + y^2 + z^2 - r^2) + \{(a - 1)\, z^2 - (b - r^2)\} = 0$$

geschrieben werden, deren letzter Theil die Verbindung zweier Ebenen repräsentiert. Es erhellt auch, wie in diesem Falle nur eine Lage reeller Kreisschnitte vorhanden ist, welche bestimmt ist durch die Verbindungslinie der Berührungspunkte der unendlich entfernten Schnitte der Fläche zweiten Grades und der Kugel.

135. Vor dem Uebergang zur umfassendern Betrachtung einer andern wichtigen symbolischen Form, mögen hier als weitere Beispiele folgende Anwendungen bemerkt werden, welche man von der hier zu Grunde liegenden Betrachtungsweise machen kann. Zuerst in Bezug auf das Problem der Normalen, welche von einem Punkte x', y', z' an das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

gezogen werden können. Man braucht nur in den Gleichungen der Normalen im Artikel 87 die x, y, z mit den x', y', z' und umgekehrt zu vertauschen, um zu sehen, dass die Coordinaten der Fusspunkte ausser der Gleichung des Ellipsoids den drei Gleichungen

$$\begin{aligned} a^2y\,(x' - x) - b^2x\,(y' - y) &= 0, \\ b^2z\,(y' - y) - c^2y\,(z' - z) &= 0, \\ c^2x\,(z' - z) - a^2z\,(x' - x) &= 0 \end{aligned}$$

genügen müssen. Man erhält aus ihnen die Coordinaten der sechs Punkte, welche der Aufgabe entsprechen.

Wenn man aber die linke Seite der auf Null reducierten Gleichung des Ellipsoids durch das Symbol S und die linken Seiten der drei Bedingungsgleichungen durch die entsprechenden Symbole S_1, S_2, S_3 bezeichnet, so giebt die durch lineare Verbindung

r be-

Werthe
hung des

ades ist mit
l“ Bd. LIII,
alen ist aber
der Betrach-
ttstheorie ge-

gilt für das Hindurchgehe
Bedingung

$$L' N$$

so dass man die Gleichun

$$A_1$$

aus dem Scheitel A besch
der Form

$$M' P' L$$

erhält. Soll dieselbe auc
sen seine Coordinaten ihr

$$L$$

---

geben sind, „Analyt. Geom.
tritt dasselbe in die Klasse
sche Untersuchung in allg
müssen hier auf die inhal
LXII. Bande des „Journal
verweisen und bemerken nu
damit gewonnen ist.

Bedingung

$$L'N' - \lambda M'P' = 0,$$

so dass man die Gleichung der durch die f

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_4$$

aus dem Scheitel A beschriebenen Kegelfläc

der Form

$$M'P'LN - L'N'MP =$$

erhält. Soll dieselbe auch durch den Punk

sen seine Coordinaten ihr genügen, d. h. v

$$L'',\ M'',\ N'',\ P''$$

---

geben sind, „Analyt. Geom. d. Kegelschn.“ Art

tritt dasselbe in die Klasse von Aufgaben ein, v

sche Untersuchung in allgemeinster Form vo

müssen hier auf die inhaltreiche Abhandlung

LXII. Bande des „Journal f. d. r. u. a. Math.“

verweisen und bemerken nur, dass ein ungem

damit gewonnen ist.

nen

0,

0,

= 0,

= 0

dritten Grades enth
trachteten Punkte be

136. Wenn

eine Kugel repräsenti
ihr sich doppelt berü

und dieselbe drückt r
gelschnitte**) gegebe
Quadrat der von irger
ten Grades an die Kug
Rechteck der Entfernu
festen Ebenen in eine

---

*) Man vergleiche A. C
1861, tom. I, p. 1216 und W
Journ." Vol. V.

**) Vergl. a. a. O. Artike

trachteten Punkte bestimmt ist*).

136. Wenn

$$S = 0$$

eine Kugel repräsentiert, so ist die Gl
ihr sich doppelt berührenden Fläche

$$S = LM$$

und dieselbe drückt nach der in der
gelschnitte**) gegebenen Interpreta
Quadrat der von irgend einem Punkt
ten Grades an die Kugel zu legenden
Rechteck der Entfernungen desselben
festen Ebenen in einem constanten V

---

*) Man vergleiche A. Cayley's Note in
1861, tom. I, p. 1216 und Weddle im „Cambr
Journ." Vol. V.

**) Vergl. a. a. O. Artikel 284.

welche
werden
id ist, so
In dem
zu einer

r Fläche
unkt und
ne ein Ke-
Linie zum

metrischen Factums, nach
den unendlich kleinen Kr
steht, in der Berührungss

137. Wir untersuche
zweiten Grades nothw
sie mehr als einen Foc
ung einer solchen Fläche

S

dargestellt werden kann, i

eine unendlich kleine Kug

Wenn wir als Coordi
rechtwinklige durch die g
len, so wird die Grösse

in der Form

den unendlich kleinen Kreis, welcher als de
steht, in der Berührungssehne l berührt wi

137. Wir untersuchen nun, ob eine
zweiten Grades nothwendig einen F
sie mehr als einen Focalpunkt besitzt
ung einer solchen Fläche immer in der For

$$S = L^2 \pm M^2$$

dargestellt werden kann, in welcher

$$S = 0$$

eine unendlich kleine Kugel (Punktkugel) be

Wenn wir als Coordinatenebenen x und
rechtwinklige durch die gerade Linie LM g
len, so wird die Grösse

$$L^2 \pm M^2$$

in der Form

it dem

Grössen
ihre neue

$\frac{-B}{B}\beta^2$,

Focalpunkt Betrac
rectrix eine Normale
welche durch den Punkt

$$\gamma' = \frac{\alpha}{A}$$

oder

$$\gamma' = \frac{}{L}$$

geht. Die geometrische In
dass der *Fusspunkt* de
gente des *Focalkegelsc*
zug auf den Hauptschn
Tangente ist

$$\frac{\alpha\alpha'}{\overline{L - N}}$$

oder

$$\frac{\alpha\gamma'}{L} +$$

d i. offenbar die Polare von (γ

elche durch den Punkt

$$\gamma' = \frac{\alpha'}{A}, \quad \delta' = \frac{\beta'}{B}$$

der

$$\gamma' = \frac{L\alpha'}{L - N}, \quad \delta' = \frac{M}{M -$$

eht. Die geometrische Interpretation dieser
ass der Fusspunkt der Directrix de
ente des Focalkegelschnitts im Punk
ug auf den Hauptschnitt der Fläch
angente ist

$$\frac{\alpha\alpha'}{L - N} + \frac{\beta\beta'}{M - N} = 1$$

der

$$\frac{\alpha\gamma'}{L} + \frac{\beta\delta'}{M} = 1,$$

i. offenbar die Polare von (γ', δ') in Bezug a

t die Basis ist.
vorliegenden Ana-
den Brennpunkten
r leicht zu bewei-
jede imaginäre
es Focalkegel-
ntenebene der

rten der centri-
ntersuchen, um die
eren und namentlich
hiedenen Arten von

ter den drei Grössen

Nenner in de
einer Mantelf
Hyperboloids
nach sind i
boloids mit
ellipse Foc
imaginäre
ren aber z
rührungse
zwei Mante
Ist soda
so haben die
gegengesetzte
Ellipsoids gle
entgegengeset
Falle des El
Klasse der

einer Mantelfläche ebenfalls positiv
Hyperboloids mit zwei Mänteln ein
nach sind in den Fällen des
boloids mit einer Mantelfläc
ellipse Focalpunkte von de
imaginäre Berührungsebene
ren aber zur Klasse der Foc
rührungsebenen in dem Fal
zwei Mantelflächen.

Ist sodann N die mittlere unt
so haben die Zähler der betrachte
gegengesetzte Zeichen, während
Ellipsoids gleiche, in den beiden
entgegengesetzte Zeichen besitzen.
Falle des Ellipsoids die Punk
Klasse derjenigen Focalpu

thes von
das gleichzeitige
der Brennpunkt
dem speciellen
Denn für den
ält die Gleichung

thalten, nur Glie-
de sind, und be-
63.)
eellen Berührungs-
eispunkte oder
ichung der Fläche

inden des Polynoms

erfüllen müssen
endlich klein
$(M-N)$ entgeg
mit andern Wo
Linien, die Foc

dargestellten K

Die Foca
Hyperboloid
Focalhyperbe
Die Foca
der Klasse der

erfüllen müssen, welche zwei ger
endlich kleine Ellipse repräsent
$(M - N)$ entgegengesetzte oder glei
mit andern Worten: Die Focalhyperb
Linien, die Focalellipse in den Schei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} -$$

dargestellten Kegel ist die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{}{b^2}$$

Die Focallinien eines Ke
Hyperboloid asymptotisch ist,
Focalhyperbel des Hyperboloi
Die Focalpunkte in dies
der Klasse derjenigen, welchen

t dem Focalpunkte

$$\left(\frac{1}{} - \frac{1}{L - N}\right)$$

Focallinie

;

enden erfüllt.
ll des Artikel 136,
ne Normalebene
nte Schnitt den
ennpunkt hat.
sind normal zu
gels. (Vergl. Bei-

der geraden
vom Scheite
net ist, so
Durchschnitt

Die de
diejenige, w
genten QR N
umgekehrt p
Wenn
Kreis ist, s
cher M zur
Weitere
sparen wir au
142. Di
deren Arten
nämlichen We

net ist, so ist offenbar PM norma
Durchschnitt S nennen, POS ein

$$PM \,.\, MS =$$

Die den Ort von P bildende
diejenige, welche man erhält, in
genten QR Normalen fällt und in je
umgekehrt proportionale Strecke a

Wenn speciell der Schn
Kreis ist, so ist der des and
cher M zum Brennpunkt hat

Weitere Details über die Eige
sparen wir auf die Untersuchung

142. Die Untersuchung
deren Arten der Flächen zwe
nämlichen Weise. So für die in

die grössere der
on der Art derer,
hen, während die
t angehört.
und M der Werth

es hyperbolischen
haben diess vorher
er Mantelfläche er-
Paraboloid als ein
werden kann, (Ar-

eines Focalpunktes
ctrix der Pol der
den Hauptschnitt

Die ents
andern Art
Cullagh ent
Die Entfer
Grades von
constanten
entspreche
selbe paral
gemessen w
In der Th
Punktes $(x', y',$
durch den Pun
die Werthe $\gamma,$

Dann schne
d. i.

Cullagh entdeckt und ist in folg
Die Entfernung eines Punkte
Grades von einem Focalpunkt
constanten Verhältniss zu sei
entsprechenden Directrix, v
selbe parallel zu einer der E
gemessen wird.

In der That, setzen wir vorau
Punktes (x', y', z') von einer der Ac
durch den Punkt zu bestimmen sei
die Werthe γ, δ haben, gemessen i

$$z = m$$

Dann schneidet eine Parallelebe
d. i.

$$z - z' = m$$

ung jedes Punk-
m constanten Ver-
Wenn aber die
zwei festen Punk-
der Ort desselben
Kreis.
snahme in dem
Focalpunkt der
st. Weil der Ort
esten Punkten ein-
n diesem Falle die
Ebene parallelen

Artikel zeigt aber
nur in dem Falle
s hat,

jede Gleichun

einen gerade
rectangulär b

---

*) Mac-C
der Flächen z
Eigenschaft de
zeichnete Ami
ständige Theor
Methode der G
taillierten Abri
in den „Proceed
öffentlicht. To
Dublin Mathem
welcher die Eig
die mit der Flä
untersucht sind.

einen geraden Kegel darstellt. Denn
rectangulär bleiben, so transformier

$$ax + by +$$

---

*) Mac-Cullagh veröffentlichte d
der Flächen zweiten Grades 1836; Sa
Eigenschaft der nichtmodularen Focalp
zeichnete Amiot unabhängig dieselbe
ständige Theorie der Focalpunkte zu
Methode der Generation nicht kannte.
taillierten Abriss der Focaleigenschaft
in den „Proceedings of the Royal Irish
öffentlicht. Townsend hat eine werth
Dublin Mathematical Journal“ Vol. II
welcher die Eigenschaften der Focalp
die mit der Fläche eine doppelte Ber
untersucht sind.

einer Directrix
es mit dem ent-

Punkt O gezo-
chneidet und in
B bestimmt, so

r Theorie der Kegel-
. „Analyt. Geom. der

neten Products
auf einer Fläche
enen die Ebenen
ie Directrix ge-

en zweiten Gra-
Directrix gehen-

drei Punk
längs einer g
Die in den
Tangentenkegels
trachteten Gleic

---

*) Wir habe
ziehungen gegeb
des, einzeln betr
die Eigenschaften
Brennpunkte sind
stellen. Diese Eig
Mac-Cullagh s
von einander zu
die Resultate von
(1837).

**) Der hier
zwei lineare Facto

Die in dem Beispiel des Artikel
Tangentenkegels einer Fläche ist ein
trachteten Gleichungsform

$$S = L^2.$$

---

*) Wir haben in diesem Abschnitte
ziehungen gegeben, welche jeder Focalp
des, einzeln betrachtet, zu ihr hat. Wi
die Eigenschaften der Focalkegelschnitt
Brennpunkte sind, und diejenigen der c
stellen. Diese Eigenschaften sind zuerst
Mac-Cullagh studiert worden, welche
von einander zu der hauptsächlichsten u
die Resultate von Chasles in den Noten
(1837).

**) Der hier nicht hervorgehobene
zwei lineare Factoren zerfällt, ist in Ar

Zwei concentrische und ähnliche Flächen zweiten Grades können als einander umhüllende betrachtet werden, bei welcher die Berührungsebene ganz in unendlicher Entfernung ist.

Jede Ebene schneidet die beiden Flächen

$$S = 0, \quad S - L^2 = 0$$

nach Curven zweiten Grades, die eine doppelte Berührung haben, und wenn der Schnitt der einen auf einen punktförmigen, d. i. unendlich kleinen Kreis sich reduciert, so ist dieser Focalpunkt der Brennpunkt des Schnittes der andern.

Wenn also eine Fläche zweiten Grades eine andere Fläche dieser Art umhüllt, so schneidet die Tangentenebene in einem Kreispunkte der einen die andern in einem Kegelschnitte, für welchen dieser Kreispunkt ein Brennpunkt ist. Und wenn die eine dieser Flächen eine Kugel ist, als für welche jede Ebene eine Kreisschnittebene und jeder Punkt ein Kreispunkt ist, so schneidet die Tangentenebene der Kugel die andere Fläche in einem Kegelschnitt, welcher ihren Berührungspunkt zum einen Brennpunkt hat.*)

Wenn man den Anfangspunkt der Coordinaten in den betrachteten Kreispunkt und die Ebene xy in die entsprechende Tangentenebene verlegt, so erhält man als den analytischen Ausdruck dieser Sätze das Ergebniss, dass für

$$z = 0$$

die Grösse $(S - L^2)$ sich auf

$$x^2 + y^2 - l^2 = 0$$

reduciert, so dass sie einen Kegelschnitt bezeichnet, welcher den Anfangspunkt zum Brennpunkt und die gerade Linie l, die Durchschnittslinie der Schnittebene mit der Ebene der Berührungscurve, zur Directrix hat.**)

---

*) Diess ist die allgemeinere Form, welche das Theorem von Dandelin über die Schnitte des Umdrehungskegels annimmt, aus dem man die Theorie der Kegelschnitte so leicht elementar entwickelt.

**) Man kann nach den Coordinaten des andern Brennpunktes fragen und die Ausführung der bezüglichen Rechnung mag hier beigefügt sein. Ist für rectanguläre Achsen

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2lyz + 2mzx + 2rz = 0$$

die Gleichung der ersten Fläche und

$$\delta' = -\delta \frac{1+\alpha}{1-\alpha^2}$$

$$x' = \frac{2\alpha\delta}{1-\alpha^2-\beta^2}, \quad y' =$$

Schreibt man die Gleichung der zw

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 + c'z^2 +$$
$$-(\alpha x + \beta y + \gamma' z +$$

wo

$$c' = c + \gamma'^2 - \gamma^2, \quad m' =$$
$$l' = l + \beta(\gamma' - \gamma), \quad r' =$$

ist, so ist

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 + c'z^2 + 2$$

die Gleichung einer Fläche zweiten Gr

$$\alpha x + \beta y + \gamma' z +$$

berührt und deren Kreispunkt (x', y') d
ebene xy und der zweite Brennpunkt d
den fünf Grössen c', l', m', r', γ' nur
stehen, so giebt es unendlich viele F
ihnen genügen.

eichung der Fläche
berührt und dass

Bezug auf die
eder, analog den
sich selbst conju-
der Kegelschnitte“
Die drei Paare
ind Paare reci-
ne. Aus einer von
veder als die Durch-

den Kante in der
zwei Seitenebenen
ihre gemeinschaftli
ein harmonisches
dieselbe Aufgabe.

Wir bemerken
Durchmesser u
kegel etc. mit s
Theorie der sic
sammenhängen.
mit der unendlich
sich ihr analytisch
meine Gleichungsfo
System conjugierte
chenden Artikel 6
sich anschliessende
allgemeinen Theori

Salmon, Anal. Geom. d

zwei Seitenebenen eines solchen Tetra
ihre gemeinschaftliche Kante gehenden
ein harmonisches Büschel bilden, fer
dieselbe Aufgabe.

Wir bemerken noch, wie die Th
Durchmesser und Diametraleb
kegel etc. mit specialisierende
Theorie der sich selbst conju
sammenhängen. Wenn eine der
mit der unendlich entfernten Ebene
sich ihr analytisches Symbol auf ein
meine Gleichungsform der gegenwärtige
System conjugierter Durchmesser und
chenden Artikel 67, 77 f. Eine gr
sich anschliessenden Sätze lassen sic
allgemeinen Theorie erkennen.

Im Artikel 126 ist bewiesen worden, dass für zwei gegebene Flächen zweiten Grades immer vier Ebenen existieren, welchen in Bezug auf beide die nämlichen Pole entsprechen. Wenn man diese Ebenen durch

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \quad P = 0$$

bezeichnet, so werden die Gleichungen beider Flächen in die Form

$$aL^2 + bM^2 + cN^2 + dP^2 = 0, \; a'L^2 + b'M^2 + c'N^2 + d'P^2 = 0$$

transformiert. Die Möglichkeit dieser Transformation kann auch a priori aus der Zählung der Constanten erkannt werden; denn die Polynome L, M, N, P enthalten implicite je drei Constanten und die gedachten Formen der allgemeinen Gleichung enthalten ausserdem drei Constanten explicite; das System derselben schliesst somit achtzehn Constanten ein und ist daher hinreichend allgemein, um die Gleichungen von irgend zwei Flächen zweiten Grades zu ersetzen. Dass sich diese Transformation auf alle Flächen eines einfachen Systems erstreckt, liegt in der Natur der Sache.

Wenn, der unendlich entfernten Lage einer der vier Seitenflächen des gemeinschaftlichen sich selbst conjugierten Tetraders zweier Flächen zweiten Grades entsprechend, die linke Seite einer der vier Gleichungen

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \quad P = 0$$

sich auf eine Constante reduciert, so ist der gegenüberliegende Eckpunkt desselben das gemeinschaftliche Centrum beider Flächen; die in demselben zusammenstossenden Kanten bilden ein System conjugierter Durchmesser und die entsprechenden Seitenflächen ein System conjugierter Diametralebenen, welches beiden Flächen gemeinschaftlich ist. Denken wir dann die eine der beiden Flächen als Kugel, so wird, da alle Systeme conjugierter Durchmesser und Diametralebenen einer solchen orthogonal sind, diess beiden Flächen gemeinschaftliche System zu dem System der Hauptebenen und der Achsen der betrachteten Fläche. Daraus entspringt eine allgemeinere Auffassung der Reduction der allgemeinen Gleichung auf die Hauptebenen; sie ist die Bestimmung der Ecken des sich selbst conjugierten Te-

die Umhüllungsfläche und das zweite

Wenn beide Flächen zweiten G
liegt eine Seitenfläche und die drei i
gemeinschaftlichen sich selbst conjug
licher Entfernung. Die Durchdringu
Richtungen der drei gemeinschaftliche
durch Cylinder zweiten Grades projic

Die Betrachtung eines speciellen
ches einer gemeinschaftlichen Abwic
ist, wird der Gegenstand des nächste
derselben sind nicht nur concentrisch
der unendlich entfernte imaginäre K
Querschnitte der developpabeln Fläch

---

*) Vergl. O. Hesse „Vorlesungen ü
Raumes“ Leipzig 1863, p. 150, 221, 251

ei unter den vier
enen developpabeln
nkte, die wir oben
nt haben; die bei-
diese beiden Kegel

kel 133.)
stehende Flächen als
aractere zusammen:

erörtert; wir verwei-

Die Rückk
zweiten Grades
gestattet.

Beispiel. F
schnittspunkte d
dreien conjugiert
Man denkt
ihnen gemeinscha
Man findet
nes Ellipsoid.

147. Man
welcher eine
punkte eines
Bezug auf ein
selbst conjug
Bezeichnen

$x =$

die Flächen eines

gestattet.

Beispiel. Für zwei Ellipsoide A und
schnittspunkte derjenigen Tangentenebe
dreien conjugierten Diametralebenen des a

Man denkt beide Ellipsoide concen
ihnen gemeinschaftliche System conjugiert

Man findet ein mit B concentrische
nes Ellipsoid.

147. Man soll die Beding
welcher eine Fläche zweiten
punkte eines Tetraeders hin
Bezug auf eine gegebene Fläc
selbst conjugiert ist.

Bezeichnen wir durch

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z =$$

die Flächen eines solchen Tetraeders

cient Θ_1 den Werth

$\frac{\Delta_1}{\partial d'}$;

e Relation

enflächen eines
st conjugierten
wie sie auch die
punkte eines in
onjugierten Te-

$\Theta \equiv$

$\Theta_1 \equiv$

$\Phi \equiv$

$+$

Die Relatio

enthält das ausge

bedingt. α^2

Beispiel 2.

besteht, so lie
selbe sich selb
Kugel in der Fl

$$\Theta_1 = \frac{\quad}{a^2} + \frac{\quad}{b^2} +$$

$$\Phi = \frac{1}{b^2 c^2}(\beta^2 + \gamma^2 - r^2) + \frac{1}{c^2}$$

$$+ \frac{1}{a^2 b^2}(\alpha^2 + \beta^2 - r^2) -$$

Die Relation

$$\Theta = 0$$

enthält das ausgesprochene Theorem, wei

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + r^2 =$$

bedingt.

Beispiel 2. Wenn für ein Hyper

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

besteht, so liegt das Centrum der selbe sich selbst conjugierten Tet Kugel in der Fläche.

$_2$, P_3, P_4 und ihre
bezeichnen, so ist
nen gehende Ebene

nkte durch

1

n, welche die Cha-
raeders ausmachen

d. VI, p. 140.

$D_1 x_1$
$D_1 y_1^2$
$D_1 z_1^2$
$D_1 x_1 y$
$D_1 x_1 z$
$D_1 y_1 z$

$$\frac{x_i^2}{a^2} +$$

$$\frac{x_i x_j}{a^2} +$$

Wenn wir

$$r_i^2 =$$

setzen, so giebt

d. h. Σ

$$V(a^2 + b^2 + c^2) =$$

Wenn man

$$D_1 x_1 + D_2 x_2 + \dots$$

$$D_1 x_1 y_1 + D_2 x_2 y_2 + D_3 x_3 y_3$$

$$D_1 x_1 z_1 + \dots$$

$$D_1 y_1 z_1 + \dots$$

$$\frac{x_i^2}{a^2} + \frac{y_i^2}{b^2} + \frac{z_i^2}{c^2} - 1 = -$$

$$\frac{x_i x_j}{a^2} + \frac{y_i y_j}{b^2} + \frac{z_i z_j}{c^2} = 1 \ (i, j$$

Wenn wir

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \quad (i$$

setzen, so giebt die Addition der Gleic

$$\Sigma D_i r_i^2 + D (a^2 + b^2$$

d. h.

$$V(a^2 + b^2 + c^2) = V_1 . \overline{CP_1}^2 + V_2 . \overline{CP_2}$$

Wenn man die Determinante D i

$= 0;$

rums und ist t die
gezogenen Tangente,

$$+ r_4^2 \frac{dD}{dx_4},$$

$$D_4 = \Sigma D_i r_i^2,$$

ch neun Punkte gehen-
usdrücken.

seiner Ecken i
gebildet wird,
Tetraeder bezei
ders V bestimm

149. Di
zweiten Gr
bilden ein
Eigenschaft
gehende Flä
enthält***).

*) Vgl. Pai
p. 290 f.

**) Vgl. Luc
p. 198; wo noch

***) Hesse,

Tetraeder bezeichnen, welche vom Centru
ders V bestimmt werden, so gilt die Rela

$$\left(\frac{abc}{6}\right)^2 = V' \frac{V_1 V}{}$$

149. Die Ecken zweier in
zweiten Grades sich selbst c
bilden ein System von acht
Eigenschaft hat, dass eine du
gehende Fläche zweiten Grades
enthält***).

---

*) Vgl. Painvin „Nouvelles Annal
p. 290 f.

**) Vgl. Luchterhandt, „Archiv d
p. 198; wo noch eine Reihe analoger Re

***) Hesse, „Crelle's Journal" Bd.

Schnittcurve enthal-
ier solcher Flächen
Ecken zweier Te-
che zweiten Grades

ie Ecken eines Te-
he dieser Art sich
ken von unendlich

en Grades, welche
en zweiten Grades
nte Fläche zweiten
ität entsprechenden

Theorie, die Theorie
s Autors, mit beson-

Tetraeders
Bezug auf e
ders gehöre
den eines H
Durchschnit
der Tetraed

Das Resul
Punktes 1 in
ist identisch m
von 2 in die Gl
bezeichnet, wäh

dargestellt wird.
mit dem Durchsc

ausgedrückt, denn

ders gehören zu dem nämlichen
den eines Hyperboloids mit ein
Durchschnittslinien der entspre
der Tetraeder besitzen die näml

Das Resultat der Substitution der
Punktes 1 in die Gleichung der Polare
ist identisch mit dem Resultat der Sul
von 2 in die Gleichung der Polare von 1
bezeichnet, während die Polare von 1

$$P_1 = 0$$

dargestellt wird. Dann ist die gerade
mit dem Durchschnittspunkt der Polaren

$$\frac{P_2}{[1,2]} = \frac{P_3}{[1,3]} =$$

ausgedrückt, denn diese Gleichungen be

, und ist

$' - a'd) = 0.$

ngen für das Durch-
lern geraden Linien,

$- b'd) = 0,$
$- c'd) = 0,$
$' - d'c) = 0;$

ungen identisch ver-
ler drei andern, d. h.
eten Geraden schnei-
welches die Behaup-

r gegebene Beweis von
Man vergleiche „Ana-
ufg. 2, 3.

drei Punk

x (

und wenn wir
P, etc. einführ
nien des Satze

n

Eine belie
$ax + by +$
schneidet jede
$N\,(cd' -$
$N\,(dc' -$
$M\,(bd' -$
$P\,(b'c - b$

und wenn wir zur Verkürzung für (1,4
P, etc. einführen, so sind die Gleichu
nien des Satzes

$$x = 0, \quad Ny + Mz +$$
$$y = 0, \quad Nx + Lz +$$
$$z = 0, \quad Mx + Ly +$$
$$w = 0, \quad Px + Qy +$$

Eine beliebige gerade Linie

$$ax + by + cz + dw = 0, \quad a'x +$$

schneidet jede derselben, wenn die vie

$$N(cd' - c'd) + M(db' - d'b) +$$
$$N(dc' - d'c) + Q(ca' - c'a) +$$
$$M(bd' - b'd) + L(da' - d'a) +$$
$$P(b'c - bc') + Q(ac' - a'c) +$$

erfüllt. Das Theorem ist wie vorher durch das Factum bewiesen, dass die Summe dieser vier Bedingungsgleichungen identisch verschwindet. Die Gleichung des Hyperboloids ist in diesem Falle

$$x^2MNP + y^2LNQ + z^2LMR + w^2PQR + xyN\,(PL + QM) + yzL\,(QM + RN) + zxM\,(RN + PL) + xwP\,(MQ + RN) + ywQ\,(LP + NR) + zwR\,(QM + LP) = 0.$$

Es ist ein specieller Fall dieser Theoreme, dass die geraden Linien, welche die Ecken eines einer Fläche zweiten Grades umgeschriebenen Tetraeders mit den Berührungspunkten der Gegenflächen desselben verbinden, Erzeugende des nämlichen Hyperboloids sind.

151. Man kann Pascal's Theorem für Kegelschnitte in dieser Form aussprechen: Die Seiten eines Dreiecks durchschneiden einen Kegelschnitt in sechs Punkten, welche paarweis in drei geraden Linien liegen, die mit den Gegenseiten des Dreiecks drei in gerader Linie liegende Punkte bestimmen. Der analoge Ausdruck des Theorems von Brianchon ist leicht zu finden. Auf Grund dieses Ausdrucks hat Chasles das folgende als das dem Pascal'schen analoge Theorem in der Geometrie des Raumes ausgesprochen: Die Kanten eines Tetraeders durchschneiden eine Fläche zweiten Grades in zwölf Punkten, durch welche, durch je drei in von derselben Ecke des Tetraeders ausgehenden Kanten eine, vier Ebenen bestimmt sind, deren Durchschnittslinien mit der jedesmaligen Gegenfläche des Tetraeders Erzeugende des nämlichen Systems eines gewissen Hyperboloids sind. Man bildet leicht das reciproke Theorem, welches keines besondern Beweises bedarf, wenn das eben Ausgesprochene bewiesen ist.

Sind dazu

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad w = 0$$

die Flächen des Tetraeders, und ist

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - \left(l + \frac{1}{l}\right)yz - \left(m + \frac{1}{m}\right)zx - \left(n + \frac{1}{n}\right)xy - \left(p + \frac{1}{p}\right)xw - \left(q + \frac{1}{q}\right)yw - \left(r + \frac{1}{r}\right)zw = 0$$

die Gleichung der Fläche zweiten Grades, so können die vier Ebenen in der Form

$$x = ny + mz + pw,$$
$$y = nx + lz + qw,$$
$$z = qx + ly + rw,$$
$$w = px + qy + rz$$

dargestellt werden, und ihre Durchschnittslinien mit den vier Ebenen

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad w = 0$$

sind ein System von geraden Linien, von denen ganz wie im letzten Artikel bewiesen wird, dass sie Erzeugende des nämlichen Systems eines Hyperboloids mit einer Mantelfläche sind.

152. Wir untersuchen als ein ferneres Beispiel von der Anwendung der Invarianten zur Entwickelung der Bedingungen, welche die permanenten Beziehungen zweier Flächen zweiten Grades zu einander ausdrücken, die Bedingung, unter welcher von zwei Flächen zweiten Grades die eine zwei Paare von Gegenkanten eines Tetraeders enthält, während die andere von den vier Seitenflächen desselben berührt wird*).

Man kann unter den Voraussetzungen der Aufgabe die Gleichung der einen Fläche zweiten Grades in der Form

$$Pxw + Lyz = 0$$

bringen, und wenn die Ebenen

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad w = 0$$

eine Fläche zweiten Grades berühren, so ist ihre Gleichung von der Form

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + 2l(xw + yz) + 2m(yw + xz) + 2n(zw + xy) = 0$$

für

$$1 + 2lm = l^2 + m^2 + n^2;$$

diese Bedingung zeigt aber, dass man für l, m, n, als deren jedes kleiner als die Einheit ist, $-\cos A$, $-\cos B$, $-\cos C$ setzen darf, wo A, B, C die Winkel eines ebenen Dreiecks sind. Man findet dann

---

*) Es ist die analoge Aufgabe der räumlichen Geometrie zur Bestimmung des einem Kegelschnitt eingeschriebenen und zugleich einem andern Kegelschnitt umgeschriebenen Dreiecks in der Ebene. Vergl. „Analyt. Geom. d. Kegelschnitte“ Artikel 363.

eschriebenen Kreises

$= 0$

auf die Seiten des
lyt. Geom. d. Kegel-
dass für irgend einen
s nämliche ist, ob α
en zur Linie $\alpha\delta$ be-
glichen Kugel in der

$\underline{\beta}$

$\frac{\gamma\delta}{\gamma} = 0;$

äche zweiten Grades,

oder

Σ

gegeben werden
ung des einem
154. Aus d
die Bedingun
allgemeine Gl
Denn die G
durch Glieder vo
weichen und dies

$(E\alpha + F\beta$

worin der zweite
tiert. Wenn wir
Gleichung des letzt
allgemeinen Gleich

$$2\,\frac{\alpha\beta}{\sin(\alpha,\beta)}\,\sin(\gamma\alpha,\gamma\beta)$$

gegeben werden kann, entsprechend einer
ung des einem Dreieck umgeschriebene

154. Aus der vorigen Gleichung k
die Bedingungen abgeleitet werden
allgemeine Gleichung eine Kugel

Denn die Gleichung irgend einer
durch Glieder vom ersten Grade von d
weichen und diese sind von der Form

$$(E\alpha + F\beta + G\gamma + H\delta)\left(\frac{\alpha}{p} +\right.$$

worin der zweite Factor die unendlich
tiert. Wenn wir aber das Product d
Gleichung des letzten Artikel addieren
allgemeinen Gleichung zweiten Grades v

$+ b'y^2 + c'z^2 + d'w^2$

$^2 + abcd'w^2,$
$^2 + a'b'c'dw^2.$

hen U und V die vier

$w = 0$

h selbst conjugierten

egenheit zur Lösung
eichungen in all-
n zweiten Grades
enen

$w = 0$

f beide dieselben

vom dritten G

Wir erhalten

die Fläche

d. i. eine Fläche
Substitution

$a +$

sie ist von der Fo

σ

Jede der Fun
α, β, etc. im zwe
dritten Grade.

In Gliedern di
gen ausdrücken, u
U und V mit der

*) Vergl. „Vorles

Wir erhalten die Bedingung, unter die Fläche

$$U + \lambda V = 0,$$

d. i. eine Fläche eines einfachen Systen Substitution

$$a + \lambda a', \quad b + \lambda b', \text{ etc. für}$$

sie ist von der Form

$$\sigma + \lambda\tau + \lambda^2\tau_1 + \lambda^3\sigma_1$$

Jede der Functionen σ, σ_1, τ, τ_1 α, β, etc. im zweiten und die Coefficie dritten Grade.

In Gliedern dieser Functionen könn gen ausdrücken, unter welchen die S U und V mit der Ebene

---

*) Vergl. „Vorlesungen“ Artikel 149.

$= 0$

r Reciprocalfläche

$= 0$

Geom. d. Kegelschnitte“

$= 0$

letztere Gleichung die
rt, Flächen also, welche
esitzen, so ist für die-

sind, so ist di

eine mit U und
Fläche und die
λ ist die Gleic

158. Unte

können wir die

dargestellten Flä
und den beiden
Sei

die Reciprocalflä

$$\overline{U} + \overline{\lambda V} =$$

eine mit U und V in dieselbe develop
Fläche und die Discriminante ihrer Gl
λ ist die Gleichung der fraglichen de

158. Unter Voraussetzung der ca

$$ax^2 + by^2 + cz^2 +$$

können wir die umschriebene develop

$$U = 0, \quad V =$$

dargestellten Flächen zweiten Grades
und den beiden Covarianten S und S_1

Sei

$$\overline{U} = 0$$

die Reciprocalfläche von

$$U = 0,$$

eveloppablen Fläche
nd die developpable
chschnittscurve hat,

$_1 = 0$

n, unter welcher
ıdringungscurve
durchschneidet.
Artikel 76 die Be-

ıe gerade Linie die
g durch die Substi-

Für die ca
$ax^2 + by^2 + c$
und die allgeme
$\alpha x + \beta y + \gamma$
ist ϱ (vergl. Art

darstellbar, wenn
von gleicher For

beziehen. Unter

und $(\sigma^2 - 4\varrho\varrho_1)$
$\Sigma(ab' -$
$+ 2\Sigma(ab' -$
$+ 2\Sigma\{(ad' -$
$+ (ac' -$

$a + \lambda a'$, $b + \lambda b'$, etc. für a, b, etc.

in die Form

$$\varrho + \lambda\sigma + \lambda^2\varrho_1 = 0$$

übergeht, in welcher sie sich auf die Flächen eines einfachen Systems bezieht, so erkennen wir, dass für jede gegebene Lage der Geraden zwei Flächen dieses Systems bestimmt werden können, welche sie berühren. Wenn die Linie aber durch die Durchschnittscurve der Flächen U und V selbst hindurchgeht, so müssen die beiden eben bezeichneten Flächen in eine zusammenfallen, weil die Gerade im Allgemeinen nur in ihrem Schnittpunkt mit jener Curve von einer Fläche des Systems berührt werden kann. Die fragliche Bedingung erscheint somit in der Form

$$\sigma^2 = 4\varrho\varrho_1,$$

und sie ist von der zweiten Ordnung in den Coefficienten jeder der beiden Flächen und von der vierten in Bezug auf die Coefficienten jeder der beiden zur Bestimmung der geraden Linie dienenden Ebenen.

Die Bedingung

$$\sigma = 0$$

wird erfüllt, wenn die gerade Linie mit den beiden Flächen U und V vier harmonische Punkte bestimmt.

Für die canonische Form der Gleichungen von U und V

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2 = 0, \quad a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + d'w^2 = 0$$

und die allgemeinen Gleichungen der geraden Linie

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w = 0, \quad \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' w = 0$$

ist ϱ (vergl. Artikel 76) durch

$$\Sigma ab\ (\gamma\delta' - \gamma'\delta)^2$$

darstellbar, wenn wir das Summenzeichen auf die sechs Glieder von gleicher Form

$$cd\ (\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2, \text{ etc.}$$

beziehen. Unter derselben Voraussetzung ist σ

$$\Sigma\ (ab' + a'b)\ (\gamma\delta' - \gamma'\delta)^2$$

und $(\sigma^2 - 4\varrho\varrho_1)$ ist somit

$$\begin{aligned}
&\Sigma\,(ab' - a'b)^2\ (\gamma\delta' - \gamma'\delta)^4 \\
+\ &2\,\Sigma\,(ab' - a'b)\ (ac' - a'c)\ (\gamma\delta' - \gamma'\delta)^2\ (\beta\delta' - \beta'\delta)^2 \\
+\ &2\,\Sigma\,\{(ad' - a'd)\ (cb' - c'b) \\
&\quad +\ (ac' - a'c)\ (db' - d'b)\}\ (\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2\ (\gamma\delta' - \gamma'\delta)^2.
\end{aligned}$$

$\cdot b'd)^2 y^2 z^2 w^4$

$\cdot a'd)\ (bc' - b'c)\}$

$\cdot c'a)\}$

$\cdot c'd)\} = 0.$

on

e Seite auf ein voll-
ein für jede der ent-

0.

vier Ebenen

$w = 0$

enen Curve vier-
elbe eine Doppel-

V, p. 50, 55.

**) Wenn

dargestellt wir

eine Doppellini
Die beiden
derselben sind

dargestellt, wen

die Tangentene
Φ', Ψ', X' die
in die Function
obige Gleichung

als die Gleichun
der als Doppelcu
len somit zusamm
Cuspidal- oder R

$$U^2\Phi + UV\Psi +$$

dargestellt wird, so ist immer die Curv

$$U = 0, \quad V =$$

eine Doppellinie der Fläche.

Die beiden einem ihrer Punkte en
derselben sind durch

$$u^2\Phi' + uv\Psi' + v$$

dargestellt, wenn

$$u = 0, \quad v =$$

die Tangentenebenen der Flächen U
Φ', Ψ', X' die Resultate der Substitutio
in die Functionen Φ, Ψ, X bezeichn
obige Gleichung anwendet, so erhält m

$$(S_1'u - S'v)^2$$

als die Gleichung der Tangentenebene
der als Doppelcurve bezeichneten Curv
len somit zusammen und man bezeichn
Cuspidal- oder Rückkehrcurve der Fläc

an sie reelle
o ist die Reci-
in Ellipsoid für
e und ein Para-
ehört, da dann
ihren muss.
d. i. einer durch
e, ist eine Re-
eine gerade Linie
erzeugten Fläche
broken Linie ent-
erboloid mit einer

" Artikel 394, 395.
Regelfläche immer
uss. Der Grad der
gleich, welche durch

und daher die

$(xx' +$

163. Die
auf irgend
um die trans
gelschnitte" Ar
Wenn wir z
Entfernungen vo

---

eine willkürliche
können, es ist ab
ebene in einem be
rade enthält, welc
Reciprocalfläche d
kürliche Gerade s
die der Punkte, in
Punkt einer Erzeug

$$(xx' + yy' + zz' + k^2)^2 = a$$

163. Die Reciprocalfläche
auf irgend einen Punkt ist ei
um die transversale Achse. (Ve
gelschnitte“ Artikel 388.)

Wenn wir zwei beliebige Punkte *A*
Entfernungen vom Ursprung in dem nä

---

eine willkürliche Gerade gehen. Nun
können, es ist aber an sich hinreichend
ebene in einem beliebigen Punkt einer R
rade enthält, welche durch diesen Punkt
Reciprocalfläche der Zahl von Erzeugend
kürliche Gerade schneiden. Und diess i
die der Punkte, in denen die Gerade die
Punkt einer Erzeugenden der Fläche ang

Normalen, welche von jedem auf die dem andern entsprechende Ebene gefällt werden. Da nun die Entfernung des Centrums einer festen Kugel vom Ursprung und die vom Centrum auf die Tangentenebene derselben gefällte Normale constant sind, so muss für jeden Punkt der Reciprocalfläche die Entfernung vom Ursprung zu der von ihm auf eine feste nämlich die dem Centrum der Kugel entsprechende Ebene gefällten Normalen in einem constanten Verhältniss sein. Der Ort des Punktes ist aber eine Umdrehungsfläche, für welche der Ursprung ein Focalpunkt ist.

Durch die Methode der Reciprocität gelangen wir daher von Eigenschaften der Kugel zu Eigenschaften von Umdrehungsflächen um die transversale Achse. Indem wir Beispiele dafür geben, stellen wir links Eigenschaften der Kugel, rechts die correspondierenden Eigenschaften der Umdrehungsflächen dar.

Beispiel 1. Eine Tangentenebene einer Kugelfläche ist normal zu der geraden Linie, die ihren Berührungspunkt mit dem Centrum verbindet.	Die gerade Verbindungslinie eines Focalpunktes mit irgend einem Punkte der Fläche ist normal zu der Ebene, welche durch den Focalpunkt und die Durchschnittslinie der entsprechenden Directrixebene mit der Tangentenebene des Punktes bestimmt ist.
Beispiel 2. Jeder Tangentenkegel einer Kugel ist ein gerader Kegel, dessen Tangentenebenen mit der Ebene der Berührungscurve gleiche Winkel bilden.	Der Kegel, dessen Scheitel ein Focalpunkt und dessen Basis ein ebener Schnitt einer Umdrehungsfläche ist, ist ein gerader Kegel, welcher die Verbindungslinie des Focalpunktes mit dem Pol der Schnittebene zur Achse hat.

Es ist ein specieller Fall dieses letzteren Satzes, dass jeder ebene Schnitt eines Umdrehungsparaboloid auf die Tangentenebene in seinem Scheitel sich als ein Kreis projiciert.

Beispiel 3. Jede Ebene durch das Centrum ist normal zu dem ihr conjugierten Durchmesser.	Jede Ebene durch einen Focalpunkt ist normal zu der geraden Linie, welche ihn mit ihrem Pol verbindet.
Beispiel 4. Die Kreisschnitte eines Kegels, der irgend einen ebenen	Die Focallinien eines Tangentenkegels der Umdrehungsfläche sind die

Schnitt der Kugel zur Basis hat, sind der Ebene desselben parallel.

Beispiel 5. Jede Ebene ist normal zu der geraden Linie, welche das Centrum mit ihrem Pole verbindet.

Beispiel 6. Jeder Cylinder, welcher eine Kugel umhüllt, ist gerade.

Beispiel 7. Irgend zwei einander conjugierte gerade Linien sind rechtwinklig zu einander.

Beispiel 8. Jede eine Kugel umhüllende Fläche zweiten Grades ist eine Umdrehungsfläche.

geraden Linien, welche seinen Scheitel mit den beiden Focalpunkten verbinden.

Die gerade Verbindungslinie eines beliebigen Punktes mit einem Focalpunkte ist normal zu der Ebene, welche durch diesen Focalpunkt und die Durchschnittslinie der entsprechenden Directrixebene mit der Polarebene des Punktes bestimmt ist.

Jeder durch einen Focalpunkt gehende ebene Schnitt hat diesen zum einen Brennpunkt.

Die Ebenen, welche von zwei einander conjugierten geraden Linien mit einem Focalpunkt bestimmt werden, sind normal zu einander.

Wenn eine Fläche zweiten Grades eine Umdrehungsfläche umhüllt, so ist ein Tangentenkegel der ersteren, dessen Scheitel ein Focalpunkt der Letzteren ist, ein Umdrehungskegel.

164. Offenbar ist das Product der Normalen constant, die von den Focalpunkten einer Umdrehungsfläche um die transversale Achse auf irgend eine ihrer Tangentenebenen gefällt werden. Wenn wir nach der im vorigen Artikel angewendeten Methode von dieser Eigenschaft zu ihrer reciproken übergehen, so erkennen wir, dass das Quadrat der Entfernung des Ursprungs von einem beliebigen Punkte der Reciprocalfläche in einem constanten Verhältniss ist zu dem Product der Entfernungen des Punktes von zwei festen Ebenen.

Aus dem vierten Beispiel des letzten Artikels erhellt, dass diese Ebenen die Ebenen der Kreisschnitte für den Asymptotenkegel der Fläche, d. i. dass sie auch die Ebenen der Kreisschnitte der neuen Fläche selbst sind. Die Durchschnittslinie dieser Ebenen ist die reciproke Linie derjenigen Geraden, welche die beiden Focalpunkte verbindet, d. h. von der Achse der Umdrehungsfläche.

Wir wissen aus Artikel 143, dass die eben bewiesene Eigenschaft jedem Punkte des Focalkegelschnitts angehört, welcher

durch die Kreispunkte der Fläche geht*) und erkennen nun, dass die Reciproke einer beliebigen Fläche zweiten Grades in Bezug auf einen Punkt des durch die Kreispunkte gehenden Focalkegelschnitts eine Umdrehungsfläche ist, welche die transversale Achse zur Drehungsachse hat; dass sie aber in Bezug auf einen Punkt des andern Focalkegelschnitts, oder, wie man sagen kann, in Bezug auf einen modularen Focalpunkt eine Umdrehungsfläche ist, welche die conjugierte Achse zu ihrer Achse hat.

Man geht daher von Eigenschaften der Umdrehungsflächen nach den Gesetzen der Reciprocität zu entsprechenden Eigenschaften irgend einer Fläche zweiten Grades in Bezug auf einen Focalpunkt und die entsprechende Directrix, und in jedem Falle ist die Achse der Umdrehungsfläche die Reciproke der dem gegebenen Focalpunkt entsprechenden Directrix. Die Achse der Umdrehungsfläche ist der Tangente des Focalkegelschnitts in dem betrachteten Focalpunkt parallel. (Vergl. Artikel 137.)

In den folgenden Beispielen stehen links die Eigenschaften der Umdrehungsflächen, rechts der entsprechenden Eigenschaften der Flächen zweiten Grades im Allgemeinen.

Beispiel 1. Der Tangentenkegel einer Umdrehungsfläche aus einem Punkte der Achse ist ein gerader Kegel, dessen Tangentenebenen mit der zur Achse normalen Ebene der Berührungscurve gleiche Winkel bilden.	Jeder Kegel, der einen Focalpunkt zum Scheitel und einen die entsprechende Directrix enthaltenden ebenen Schnitt einer Fläche zweiten Grades zur Basis hat, ist ein gerader Kegel, welcher die Verbindungslinie des Focalpunktes mit dem Pol der Schnittebene zur Achse hat; diese letztere Gerade ist normal zu der durch den Focalpunkt und die Directrix bestimmten Ebene.
Beispiel 2. Jede Tangentenebene ist normal zu der durch ihren Berührungspunkt und die Achse bestimmten Ebene.	Die Gerade, welche einen Focalpunkt mit einem beliebigen Punkte der Fläche verbindet, ist normal zu der Verbindungslinie des Focalpunk-

*) Es geschah auf diesem Wege, dass zuerst diese Eigenschaft und die Unterscheidung der beiden Arten von Focalpunkten vom Verfasser gefunden wurde.

Beispiel 3. Die Polarebene eines Punktes ist zu der durch ihn mit der Achse bestimmten Ebene normal.

Beispiel 4. Die durch einen Focalpunkt mit irgend zwei conjugierten Geraden bestimmten Ebenen sind zu einander normal.

Beispiel 5. Wenn ein Kegel einer Umdrehungsfläche umgeschrieben ist, so ist eine seiner Hauptebenen durch den Scheitel und die Achse bestimmt und eine andere ist der Ebene der Berührung parallel.

Beispiel 6. Jeder aus einem Focalpunkt über einem ebenen Schnitt der Umdrehungsfläche beschriebene Kegel ist gerade*).

Beispiel 7. Der Ort des Durchschnittspunktes von drei auf einander normalen Tangentenebenen eines Paraboloids ist eine Ebene.

tes mit dem Durchschnittspunkt der entsprechenden Tangentenebene und der Directrix.

Die gerade Linie, welche einen beliebigen Punkt mit einem Focalpunkt verbindet, ist normal zu der geraden Verbindungslinie des Focalpunktes mit dem Durchschnittspunkt seiner Directrix mit der Polarebene des Punktes.

Eine den Kreisschnitten parallele und durch eine Directrix gehende Ebene wird von zwei einander conjugierten Geraden in Punkten geschnitten, welche an dem entsprechenden Focalpunkt einen rechten Winkel bestimmen.

Der aus einem Focalpunkt über einem ebenen Schnitt einer Fläche zweiten Grades beschriebene Kegel hat zur einen Achse die gerade Verbindungslinie des Focalpunkts mit dem Pol der Schnittebene und zur andern die Verbindungslinie des Focalpunkts mit dem Durchschnittspunkte der entsprechenden Directrix und der Schnittebene.

Der aus einem Focalpunkt über der Durchschnittscurve einer durch die entsprechende Directrix gehenden und den Kreisschnitten parallelen Ebene mit einem beliebigen Tangentenkegel der Fläche beschriebene Kegel ist gerade.

Wenn durch einen Punkt einer Fläche zweiten Grades drei zu einander normale Gerade gelegt sind, so geht die durch ihre andern Schnittpunkte in der Fläche bestimmte Ebene durch einen festen Punkt. (Vgl. Artikel 117, Beispiel 9.) Wenn jener Punkt nicht in der Fläche liegt, so umhüllt die Ebene eine Umdrehungsfläche.

---

*) Seine Achse enthält den Pol der Schnittebene.

Beispiel 8. Wenn eine Fläche zweiten Grades eine Umdrehungsfläche umhüllt, so ist die Achse dieser Letzteren parallel einer Hauptebene der Ersteren.

Wenn zwei Flächen zweiten Grades einander umhüllen, so hat ein aus einem Focalpunkt der einen beschriebenen Tangentenkegel der andern die Verbindungslinie des Focalpunktes mit dem Durchschnittspunkt der entsprechenden Directrix mit der Ebene der Berührung zur einen Achse.

VIII. Kapitel.

Confocale Flächen zweiten Grades.

---

165. Wir wollen in diesem Kapitel eine Uebersicht derjenigen Eigenschaften der Flächen zweiten Grades geben, welche den Eigenschaften confocaler Kegelschnitte analog sind. Wir nehmen dazu unsern Ausgang von einer, von derjenigen der Artikel 136 f. unabhängigen Methode, durch welche wir auch zur Betrachtung der Focalkegelschnitte gelangen.

Concentrische und coaxiale Kegelschnitte werden als confocal bezeichnet, wenn die Differenz der Quadrate ihrer Halbachsen die nämliche ist; d. h. die mit der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

confocalen Kegelschnitte sind durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2 \pm \lambda^2} + \frac{y^2}{b^2 \pm \lambda^2} = 1$$

gegeben. So lange λ^2 das positive Zeichen erhält und so lange bei negativem Zeichen λ^2 numerisch kleiner als b^2 ist, ist der confocale Kegelschnitt eine Ellipse; wenn λ^2 negativ und zwischen b^2 und a^2 enthalten ist, so ist der confocale Kegelschnitt eine Hyperbel und für $\lambda^2 > a^2$ ist sie imaginär.

Für $\lambda^2 = b^2$ reduciert sich die Gleichung auf

$$y^2 = 0,$$

d. h. die Achse der x ist die Grenze, welche die confocalen Ellipsen von den confocalen Hyperbeln trennt. Aber die beiden Brennpunkte gehören doch in einem besonderen Sinne zu ihr.

iden Brennpunkte

zwei concentri-
rades confocal,
ler Achsen für
ür das Ellipsoid

$= 1$

Ellipsoiden
haben. Denn
gemeinen drei
Flächen legen
bische Bedingu

oder a

$x'^2 (b^2 - \lambda^2) (c^2$

gefunden wird.

und die beiden an

$x'^2 (b^2 -$

Wenn

Für das positive Zeichen von λ^2 und für negative Werthe desselben, welche kleiner sind als c^2, ist die Fläche ein Ellipsoid. Eine Kugel von unendlichem Halbmesser ist die Grenze der Ellipsoide des Systems, denn sie entspricht dem speciellen Werthe $\lambda^2 = \infty$.

Für negative Werthe von λ^2 zwischen den Grenzen c^2 und b^2 repräsentiert die Gleichung ein Hyperboloid mit einer Mantelfläche und für Werthe zwischen den Grenzen b^2 und a^2 ein Hyperboloid mit zwei Mantelflächen. Dem Grenzwerthe $\lambda^2 = c^2$ entspricht die Ebene

$$z = 0$$

als Grenze zwischen den Ellipsoiden und den einfachen Hyperboloiden des Systems; wenn wir aber in der allgemeinen Gleichung die Substitutionen

$$\lambda^2 = c^2, \quad \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 0$$

vollziehen, so entsprechen die Punkte des so erhaltenen Kegelschnitts

$$\frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} = 1$$

in einem speciellen Sinne jener Grenze zwischen den Ellipsoiden und Hyperboloiden, welcher wir eben gedacht haben. Denn durch einen Punkt (x', y', z') lassen sich im Allgemeinen drei einer gegebenen Fläche zweiten Grades confocale Flächen legen, weil für λ^2 als die unbekannte Grösse eine cubische Bedingungsgleichung

$$\frac{x'^2}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y'^2}{b^2 - \lambda^2} + \frac{z'^2}{c^2 - \lambda^2} = 1$$

oder

$$x'^2 (b^2 - \lambda^2)(c^2 - \lambda^2) + y'^2 (c^2 - \lambda^2)(a^2 - \lambda^2) + z'^2 (a^2 - \lambda^2)(b^2 - \lambda^2) = (a^2 - \lambda^2)(b^2 - \lambda^2)(c^2 - \lambda^2)$$

gefunden wird. Für $z' = 0$ ist eine der Wurzeln dieser Gleichung

$$\lambda^2 = c^2$$

und die beiden andern bestimmen sich aus der reducierten Gleichung

$$x'^2 (b^2 - \lambda^2) + y'^2 (a^2 - \lambda^2) = (a^2 - \lambda^2)(b^2 - \lambda^2).$$

Wenn

$$\frac{x'^2}{a^2 - c^2} + \frac{y'^2}{b^2 - c^2} = 1$$

ist, so wird eine Wurzel dieser Gleichung

$$\lambda^2 = c^2,$$

und diess bezeichnet den speciellen Sinn, in welchem die Punkte der Focalellipse diesem Grenzwerthe entsprechen.

In analoger Weise trennt die Ebene

$$y = 0$$

die Hyperboloide mit einer Mantelfläche von denen mit zwei Mantelflächen und die Focalhyperbel in dieser Ebene

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} + \frac{z^2}{c^2 - b^2} = 1$$

ist diesem Grenzwerthe in der nämlichen speciellen Art verbunden.

Der Focalkegelschnitt in der dritten Hauptebene, welchen die Gleichung

$$\frac{y^2}{b^2 - a^2} + \frac{z^2}{c^2 - a^2} = 1$$

bezeichnen würde, ist imaginär.*)

167. Die drei durch einen Punkt gehenden mit einer gegebenen Fläche zweiten Grades confocalen Flächen sind respective ein Ellipsoid, ein Hyperboloid mit einer Mantelfläche und ein Hyperboloid mit zwei Mantelflächen.

Denn wenn wir in die zur Bestimmung von λ^2 dienende cubische Gleichung die successiven Substitutionen

$$\lambda^2 = a^2, \quad \lambda^2 = b^2, \quad \lambda^2 = c^2, \quad \lambda^2 = -\infty$$

vollziehen, so erhalten wir Resultate von den respectiven Vorzeichen

$$+, \quad -, \quad +, \quad -,$$

welches beweist, dass diese Gleichung stets drei reelle Wurzeln hat, von denen eine kleiner als c^2, eine zweite zwischen c^2 und b^2, und eine dritte zwischen b^2 und a^2 enthalten ist. Wie im letzten

---

*) Dieselbe Sache spricht sich auch folgendermassen aus: In jedem Punkte einer Hauptebene treffen ausser dem Focalkegelschnitt derselben zwei confocale Flächen zusammen. Durch jeden Punkt einer Hauptachse geht eine einzige confocale Fläche; die beiden in ihr sich schneidenden Focalkegelschnitte repräsentieren die andern. Im Centrum der Flächen schneiden sich die drei Focalkegelschnitte.

$$x'^2 = \frac{a'^2 a''^2 a'''^2}{(a^2 - b^2)\ (a^2}$$

Und da wir ebenso wohl b^2 oder Grösse ansehen konnten, so erhalten Ausdrücke

$$y'^2 = \frac{b'^2 b''^2 b'''^2}{(b^2 - a^2)\ (b^2 - c^2)}, \qquad z'^2 =$$

---

*) Diese Ausdrücke erlauben eine ein dinaten der Kreispunkte; denn diese sind Focalhyperbel mit der Fläche (Artikel 1 hyperbel

$$a''^2 = a'''^2 = a^2 -$$

ist, so sind die Coordinaten der Kreispunk

$$x^2 = a^2 \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}, \quad y = 0,$$

const.

welche sich aus je
ch jeden von ihnen
onstant.

einer Kugel durch

t.

nkte einer aus dem
Kugel die Quadrat-
gehenden confoca-

r alle Punkte einer
as Product der drei
ihrer Punkte gehen-

erlaubt uns auch,
unktes confoca-
auszudrücken.

Rest $b^2 b'^2 a''^2 c^2$
dividiert, einen
der durch ein
Indem man in d
gebene Resultat.

170. Zwei
überall recht

Wenn $(x', y$
ist und p' und p
vom Centrum au
gefällt werden, s
ser zwei Normale

$$\frac{p'x'}{a'^2},$$

Sie sind zu e
tikel 13)

$p' p''$ {

der durch ein anderes Glied des Div
Indem man in dieser Weise fortfährt,
gebene Resultat.

170. Zwei confocale Fläche überall rechtwinklig.

Wenn (x', y', z') ein gemeinschaft
ist und p' und p'' die Längen der No
vom Centrum auf die Tangentenebene
gefällt werden, so sind nach Artikel 8
ser zwei Normalen

$$\frac{p'x'}{a'^2}, \quad \frac{p'y'}{b'^2}, \quad \frac{p'z'}{c'^2}; \quad \frac{p''x'}{a''^2},$$

Sie sind zu einander rechtwinklig
tikel 13)

$$p'p'' \left\{ \frac{x'^2}{a'^2 a''^2} + \frac{y'^2}{b'^2 b''^2} + \right.$$

sind, so bleibt nur
esser ihrer Schnitt-
ingung, unter wel-
l, durch

$$\frac{\cos\gamma'}{c'^2} = 0$$

ngscosinus

$$\frac{p'''z'}{c'''^2}$$

$$\left.\frac{z'^2}{''^2 c'''^2}\right\} = 0$$

ebt sich ohne Wei-
en des letzten Ar-

und wir erhalten

$$\frac{x'^2}{a'^2 a''^4} +$$

und durch Substitu
bestimmten Werth

In derselben A
Halbachse

Wenn also zv
sich durchschnei
cher der Normal
Durchschnittscur
Diese Halbdurchmesse
sche Curve, und beide

und wir erhalten durch ihre Subtraction

$$\frac{x'^2}{a'^2 a''^4} + \frac{y'^2}{b'^2 b''^4} + \frac{z'^2}{c'^2 c''^4} =$$

und durch Substitution dieses Ausdrucks
bestimmten Werth

$$\varrho^2 = a'^2 - a''^2.$$

In derselben Art finden wir für d
Halbachse

$$\varrho^2 = a'^2 - a'''^2.$$

Wenn also zwei confocale Flä
sich durchschneiden, so ist ein Ra
cher der Normale der andern in
Durchschnittscurve parallel ist, v
Diese Halbdurchmesser bilden daher auf
sche Curve, und beiden Systemen der Dur

ls Coordinatenebenen
, p''' die Coordinaten
vischen den Werthen
ann daher folgender-
e (x', y', z') als Cen-
eben werden, welche
aben und sich in dem
n. Die Achsen des

$''$, c'''.

Systems sind die drei

er Hauptebenen z. B.
der Fläche, zu wel-
Kegelschnitt, für wel-
chsen sind

Welches für gegeb

175. Man s

Ebene in Bezug

stimmen.

Sei

die betrachtete Ebe

$$\frac{x\xi}{a^2 -}$$

mit der ersteren ide

$$\frac{\xi}{a^2 - \lambda^2} =$$

Die Elimination
für die Gleichungen

$$\frac{x}{A} -$$

Ebene in Bezug auf ein System co
stimmen.

Sei

$$Ax + By + Cz =$$

die betrachtete Ebene und (ξ, η, ζ) ihr Po

$$\frac{x\xi}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y\eta}{b^2 - \lambda^2} +$$

mit der ersteren identisch werden, d. h.

$$\frac{\xi}{a^2 - \lambda^2} = A, \quad \frac{\eta}{b^2 - \lambda^2} = B,$$

Die Elimination von λ^2 zwischen di
für die Gleichungen des Ortes

$$\frac{x}{A} - a^2 = \frac{y}{B} - b^2 =$$

ten Artikel die

$'^2$,

$$-z' = \frac{c'^2 - c^2}{c^2} z',$$

$$+ \frac{z'^2}{c^4}\Big\},$$

e Normale bezeichnet.
egels einer Fläche
er drei confocalen
el des Kegels hin-

tel hat und d
Tangentenebene
und *zwei* Tange
einer Hauptebene
dieser Ebene gle

Die *Focalkeg*
Scheitelpunkten
Grades beschrieb
die confo*calen Fl*
*ei*nes Focalkegels,
Fläche *zweiten* Gra
Winkel mit *der T*
gente angehört.

Wenn *die Flä*
reduciert sich *ihr*
das *eben* ausgespro
dass jede *Tangente*

Tangentenebenen des Satzes Tangenten
und zwei Tangentenebenen eines Kege
einer Hauptebene enthaltene Gerade hi
dieser Ebene gleiche Winkel.

Die Focalkegel, d. h. diejenigen Ke
Scheitelpunkten über den Focalkegelsch
Grades beschrieben werden, sind die Gr
die confocalen Flächen umhüllen und
eines Focalkegels, welche durch eine
Fläche zweiten Grades gelegt werden kön
Winkel mit der Tangentenebene der F
gente angehört.

Wenn die Fläche zweiten Grades
reduciert sich ihr Focalkegelschnitt au
das eben ausgesprochene Theorem laut
dass jede Tangentenebene eines Kegel

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\Big)$$

nneten Normalen als
cósinus dieser Linien
erkennen, dass wir

$$\frac{c'}{c} z,$$

$$z,$$

$$z$$

eichter zu erkennen,
Ist

181. Wenn
so erhalten wir a
den Coefficienten

$$p'$$

und den Coefficie

$$2p'p'' S$$

die linke Seite de

*) Wir bemerke

ist, weil $a'^2 - a^2$, a''^2
des Artikel 166 sind
ist.

so erhalten wir auf der linken Seite der
den Coefficienten von x^2 in der Form

$$p'^2 \; S \left\{ \frac{x'^2}{a'^4 a^2} + \frac{y'^2}{b'^4 b^2} + \right.$$

und den Coefficienten von xy in der F

$$2p'p'' \; S \left\{ \frac{x'^2}{a^2 a'^2 a''^2} + \frac{y'^2}{b^2 b'^2 b'} \right.$$

die linke Seite der transformierten Glei

---

*) Wir bemerken, dass

$$S = \frac{(a'^2 - a^2)\,(a''^2 - a^2)}{a^2 b^2 c^2}$$

ist, weil $a'^2 - a^2$, $a''^2 - a^2$, $a'''^2 - a^2$ die Wurz
des Artikel 166 sind, deren absolutes Glied

$$= a^2 b^2 c^2 S$$

ist.

ungen sind daher

t erhalten können,
im 12. Beispiel des
den letzten Artikeln

irgend eine Normale
eder der Hauptebenen
welche in Bezug auf
lare sind. Es ist ein

die entsprechende

erfährt diese
len. *Die zu*

$$\frac{x^2}{a^2} +$$

und bei der Tr

— wir wollen il

kurz bezeichnen

$$p'^2 \left(\frac{}{a'}\right.$$

der von xy

$$2pp' \left(\frac{x'^2}{a^4\, a'^2}\right.$$

len. Die zu parallelen Achsen transfo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\left(\frac{xx'}{a^2}\right.$$

und bei der Transformation wird der

$$p^2 \left\{\frac{x'^2}{a^6} + \frac{y'^2}{b^6}\right.$$

— wir wollen ihn durch

$$\frac{1}{\overline{\gamma^2}}$$

kurz bezeichnen — der von y^2

$$p'^2 \left(\frac{x'^2}{a'^4\, a^2} + \frac{y'^2}{b'^4\, b^2} + \right.$$

der von xy

$$2\,pp' \left(\frac{x'^2}{a^4\, a'^2} + \frac{y'^2}{b^4\, b'^2} + \frac{z'^2}{c^4 c'^2}\right.$$

$$+ \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{z'^2}{c'^2}\Big)$$

$$\Big\}^2,$$

$$\Big\}^2 = 0$$

$$= 1$$

dargestellt wird,
des Hyperbolo
ähnlich oder dur

gegeben ist, der
linien *des* Syst
liebigen Punkt
umgeschrieben
boloids mit ein
durch diesen P

Man kann den
eine beliebige Seite

---

*) „Liouville's J
p. 137.

des Hyperboloids mit der Tangent
ähnlich oder durch

$$\frac{x^2}{a'^2 - a''^2} - \frac{z^2}{a''^2 -$$

gegeben ist, der Satz von Chasles
linien des Systems von Kegeln,
liebigen Punkte den Flächen ein
umgeschrieben sind, sind die Er
boloids mit einer Mantelfläche
durch diesen Punkt geht*).

Man kann denselben auch so be
eine beliebige Seite eines unter diesen

---

*) „Liouville's Journal" t. XI, p. 121.
p. 137.

len Systems
ne gegebene

Linie und sind
, welche durch
diese Linie mit
dass das a der
ung

$$\frac{}{a^2} = 0$$

dieser Gleichung,

$$\frac{}{a^2} = 0$$

$$\frac{}{a'^2} = 0$$

Normale, welche
entspricht, den F
confocale Fläche,
linie der gegeben
ist; in Folge des
gegebenen Gerade
chen und die dur
hyperbolisches Par
angestellten Erörte
zeugenden des and

Die beiden
gegebene gerad
wo dieselbe die

Wenn die g
der Flächen de
halten wir eine
Die Normale, welch

entspricht, den Pol dieser Ebene in B
confocale Fläche, einen Punkt also, w
linie der gegebenen Geraden in Bezug
ist; in Folge dessen schneidet jede
gegebenen Geraden in Bezug auf irge
chen und die durch die Normalen erz
hyperbolisches Paraboloid. (Artikel 111
angestellten Erörterung sind für das n
zeugenden des andern Systems.

Die beiden Punkte, in dene
gegebene gerade Linie schneide
wo dieselbe die beiden confocal

Wenn die gegebene gerade
der Flächen des Systems (*S*) ei
halten wir einen bemerkenswe
Die Normale, welche irgend einer der d

ormale ist,

rch den Schei-
ner Tangenten-
en, so müssen
ciproken Kegel

$a^2) \cos^2\gamma = 0$

$, = a^2$

er Fläche des
eine Ebene be-
ser Ebene wissen
e die Winkel, wel-
nit der Ebene ein-
kannt ist.

kels unabhängig be-

gleich *ist der* Su
vector *und zweier*
cher Linien auf *die*
Normale. *Nun sin*
Richtung constant,
selben, und die E
sie die *Normale se*
gebenen Ebene *ang*
Grösse

$a'^2 \cos$

constant ist für alle
Ebene, *und man er*
die Ebene berührend
sich *für*

$\cos\alpha =$

ergiebt.

190. *Der Ort de*

vector und zweier den Achsen der Focal
cher Linien auf die vom Centrum auf di
Normale. Nun sind die beiden letzten
Richtung constant, also auch die bezei
selben, und die Projection des Radius
sie die Normale selbst ist, so lange der
gebenen Ebene angehört, also ist bewie
Grösse

$$a'^2 \cos^2\alpha + a''^2 \cos^2\beta +$$

constant ist für alle Lagen des Punktes
Ebene, und man erkennt, dass dieser c
die Ebene berührenden Fläche des Syste
sich für

$$\cos\alpha = 1, \quad \cos\beta = 0,$$

ergiebt.

190. Der Ort des Durchschnitt

ihrer gemein-
das Centrum
er Tangenten-
henden confo-

n gebildeten Ab-
Seiten gegen die
einer gemeinschaft-

n Kegeln

$$+ \frac{z^2}{\gamma'^2} = 0$$

$$\frac{z^2}{\gamma^2 \gamma'^2 (\alpha^2 - \beta^2)},$$

rth dieser Quotienten

det, so ist der in
Punktes paralle
stimmte Abschn

Diess von Ma
gon des Satzes für
Centrum parallel z
lele in den Focals
stimmt, welche der

192. Auf Grun
les die Lösung des
tung der Achsen
des aus einem ge
messer zu bestim

Wenn wir die
können wir nach de
und Richtung der A
stimmen. Seiner Eb

Punktes parallel durch das Centrum
stimmte Abschnitt der grossen Achs

Diess von Mac-Callagh gefundene
gon des Satzes für ebene Curven, nach v
Centrum parallel zu einer Tangente einer
lele in den Focalstrahlen des Berührungs
stimmt, welche der Hauptachse gleich sin

192. Auf Grund der eben entwickelte
les die Lösung des Problems gegeben, d
tung der Achsen einer centralen F
des aus einem gegebenen System c
messer zu bestimmen.

Wenn wir die Ebene von zweien d
können wir nach den Gesetzen der ebene
und Richtung der Achsen des ihr entspr
stimmen. Seiner Ebene ist die dem Pun

des dritten Durchmessers, entsprechende Tangentenebene der Fläche parallel. Nun ward im Artikel 173 bewiesen, dass das Centrum der gegebenen Fläche zweiten Grades der Durchschnittspunkt von drei confocalen Flächen ist, die in P ihr Centrum haben. Wenn wir die Focalkegelschnitte dieses neuen Systems bestimmen, so schneiden sich die beiden aus dem Centrum der gegebenen Fläche über diesen beschriebenen Focalkegel in vier geraden Linien, welche mit einander sechs Ebenen bestimmen, deren Durchschnittslinien die Richtungen der fraglichen Achsen bezeichnen, während nach Artikel 191 die durch den Punkt gehenden Tangentenebenen in ihnen die der Länge der Achsen gleichen Stücke abschneiden.

Die fraglichen Focalkegelschnitte werden aus der Kenntniss ihrer Ebenen und der Richtung ihrer Achsen leicht construiert, da die Länge derselben überdiess durch

$$a^2 - a''^2,\ a'^2 - a''^2;\quad a^2 - a'^2,\ a'^2 - a''^2$$

ausgedrückt sind und die Achsenlängen des gegebenen Schnittes

$$a^2 - a'^2,\quad a^2 - a''^2 \quad \text{(Artikel 172)},$$

welche bekannt sind, jene direct bestimmen.

193. Wenn durch einen Punkt P in einer Fläche zweiten Grades eine Sehne gezogen wird, welche wie im Artikel 191 zwei confocale Flächen berührt, so können wir einen Ausdruck für die Länge derselben finden.

Wir ziehen einen ihr parallelen Halbdurchmesser durch das Centrum und bezeichnen seine Länge durch R; wenn wir dann durch P eine zu diesem Durchmesser conjugierte Ebene und eine Tangentenebene legen, so bestimmen beide in jenem Durchmesser, vom Centrum aus gemessen, Abschnitte, deren Product $= R^2$ ist. Nun ist aber der durch die conjugierte Ebene bestimmte Abschnitt die Hälfte der fraglichen Sehne und der der Tangentenebene entsprechende ist derselbe, dessen Werth wir im Artikel 191 gefunden haben. Daher ist

$$C = \frac{2R^2 \sqrt{\{(a'^2 - \mathring{a}^2)\ (a'^2 - a'^2)\}}}{a'\,b'\,c'}.$$

Wenn die betrachtete Sehne insbesondere diejenige ist, welche die beiden Focalkegelschnitte schneidet, so haben wir

$$a^2 = a'^2 - b'^2,\quad a'^2 = a'^2 - c'^2$$

und daher

$$C = \frac{2R^2}{a'}.$$

194. Man soll den Ort der Scheitel aller der geraden Kegel bestimmen, welche eine gegebene Fläche zweiten Grades umhüllen.

Damit die Gleichung

$$\frac{x^2}{a'^2 - a^2} + \frac{y^2}{a''^2 - a^2} + \frac{z^2}{a'''^2 - a^2} = 0$$

einen geraden Kegel darstellt, müssen zwei ihrer Coefficienten einander gleich sein, d. h. man muss entweder

$$a'' = a', \quad \text{oder} \quad a'' = a'''$$

haben, oder in andern Worten, die Gleichung des Artikel 166 muss für den fraglichen Punkt (x', y', z') zwei gleiche Wurzeln haben. Da nun nach der Untersuchung der Grenzen der Wurzeln gleiche Wurzeln nur unter der Voraussetzung möglich sind, dass λ einer der Hauptachsen gleich ist, so erkennen wir als den fraglichen Ort die Focalkegelschnitte der Fläche. Diess stimmt mit dem, was im Artikel 144 bewiesen ist, überein.

Wir erkennen daraus, dass die Reciproke einer Fläche zweiten Grades in Bezug auf einen ihrer Focalpunkte eine Umdrehungsfläche ist, und dass insbesondere als Reciprocalfläche in Bezug auf einen Kreispunkt ein Umdrehungsparaboloid erhalten wird. Denn ein Kreispunkt gehört zugleich einem Focalkegelschnitt (Artikel 139) und der Fläche selbst an, und aus dem letzteren Grunde bekanntlich ist die entsprechende Reciprocalfläche ein Paraboloid.

Als ein anderer specieller Fall unseres Satzes ergiebt sich, dass einer centralen Fläche zweiten Grades zwei gerade Cylinder umschrieben werden können, deren Erzeugende den Asymptoten der Focalhyperbel parallel sind. (Vergl. Artikel 115.) Endlich ergiebt sich, dass der über der Focalellipse stehende Kegel nur dann ein gerader Kegel ist, wenn sein Scheitel der Focalhyperbel angehört und umgekehrt; ein Ergebniss, welches ohne allen Bezug auf die confocalen Systeme dahin ausgesprochen werden kann, dass der Ort der Scheitel derjenigen geraden Kegel, welche über einem gegebenen Kegelschnitt stehen, ein zweiter Kegelschnitt ist, der die Brenn-

punkte des ersteren zu Scheiteln und seine Scheitel zu Brennpunkten hat und dessen Ebene normal zur Ebene des ersteren steht.*) Wenn

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die Gleichung des einen Kegelschnitts ist, so erhält man die des andern in der Form

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Es ward im Artikel 163 (Beispiel 8) bewiesen, dass der aus einem Focalpunkt einer Umdrehungsfläche an eine sie umhüllende Fläche zweiten Grades gehende Tangentenkegel ein Umdrehungskegel sei und im Zusammenhang dieses Artikels erkennen wir nun, dass die Focalkegelschnitte einer Fläche zweiten Grades den Ort der Focalpunkte aller der Umdrehungsflächen bezeichnen, welche derselben umgeschrieben werden können.

195. Die folgenden Beispiele mögen zur ferneren Erläuterung der entwickelten Principien dienen.

Beispiel 1. Welches ist der Ort des Durchschnittspunktes derjenigen Erzeugenden eines Hyperboloids, welche sich rechtwinklig durchschneiden?

Da der Durchschnitt einer mit der Ebene solcher Erzeugenden — einer Tangentenebene — parallelen Ebene mit der Fläche eine gleichseitige Hyperbel ist, so gilt nach Artikel 172 die Relation

$$(a''^2 - a'^2) + (a''^2 - a'''^2) = 0;$$

und da nach Artikel 169 das Quadrat des Radius vector für den betrachteten Punkt durch

$$a''^2 + b''^2 + c''^2 - (a''^2 - a'^2) - (a''^2 - a'''^2)$$

ausgedrückt ist, so erkennen wir als den fraglichen Ort den Durchschnitt des Hyperboloids mit einer Kugel, für welche das Quadrat des Halbmessers

$$= a''^2 + b''^2 + c''^2$$

ist.

Man sieht, die Frage kann allgemeiner aufgefasst werden als die Frage nach den Tangentenebenen, deren parallele Centralschnitte einem gegebenen Kegelschnitt ähnlich sind; sie überträgt sich damit auf alle Flächen zweiten Grades, während sie zunächst nur auf die geradlinigen sich zu beziehen scheint.

---

*) Vergl. Artikel 117, Beispiel 12.

Dasselbe Resultat erhält man durch folgende Schlüsse: Wenn zwei Erzeugende rechtwinklig zu einander sind, so bildet ihre Ebene mit den beiden durch je eine von ihnen mit der ihrem Durchschnittspunkt entsprechenden Normale bestimmten Ebenen ein System von drei zu einander normalen Tangentenebenen der Fläche, und der Durchschnittspunkt derselben liegt daher nach Artikel 89 auf der Kugel

$$a''^2 + b''^2 + c''^2 = r^2.$$

Die Durchschnittspunkte der zu einander normalen Erzeugenden des Paraboloids

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{4z}{c}$$

liegen in der Ebene

$$z = \frac{b^2 - a^2}{c}.$$

(Vergl. Artikel 106.)

Beispiel 2. Man soll den Ort des Durchschnitts von drei Tangenten einer Fläche zweiten Grades bestimmen, welche rechtwinklig zu einander sind. (Artikel 117, Beispiel 8.)

Wenn wir durch α, β, γ die von einer dieser Tangenten mit den Normalen des fraglichen Punktes gebildeten Winkel bezeichnen, so gelten, weil jede dieser Tangenten dem durch den Punkt gehenden Tangentenkegel angehört, die drei Gleichungen

$$\frac{\cos^2\alpha}{a'^2 - a^2} + \frac{\cos^2\beta}{a''^2 - a^2} + \frac{\cos^2\gamma}{a'''^2 - a^2} = 0,$$

$$\frac{\cos^2\alpha'}{a'^2 - a^2} + \frac{\cos^2\beta'}{a''^2 - a^2} + \frac{\cos^2\gamma'}{a'''^2 - a^2} = 0,$$

$$\frac{\cos^2\alpha''}{a'^2 - a^2} + \frac{\cos^2\beta''}{a''^2 - a^2} + \frac{\cos^2\gamma''}{a'''^2 - a^2} = 0,$$

und wir finden durch Addition derselben

$$\frac{1}{a'^2 - a^2} + \frac{1}{a''^2 - a^2} + \frac{1}{a'''^2 - a^2} = 0.$$

Nun sind die Grössen

$$a'^2 - a^2, \quad a''^2 - a^2, \quad a'''^2 - a^2$$

die drei Wurzeln der cubischen Gleichung des Artikel 166, welche nach Potenzen von λ^2 geordnet, die Form

$$\lambda^6 + \lambda^4 (x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2 - c^2)$$
$$- \lambda^2 \{(b^2+c^2)x^2 + (c^2+a^2)y^2 + (a^2+b^2)z^2 - b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2\}$$
$$+ b^2c^2x^2 + c^2a^2y^2 + a^2b^2z^2 - a^2b^2c^2 = 0$$

erhält. Die Bedingung für das Verschwinden der Summe der reciproken Werthe der Wurzeln dieser Gleichung ist das Verschwinden des Coeffi-

$a^2 = l^2$

$+ \frac{1}{l^2}\Big\}$.

iden einem Ro-
scurve einge-
en für $\varkappa$ als eine

ler Ebene der Achsen

welche unmittelbar de

196. Zwei P
zwei *confocalen*
respondierende

$$\frac{x}{a} =$$

durch ihre *Coord*
Da nach dem *in*

x^2

die *Grösse*

constant *bleibt*, so lan
der Punkt der *Durchse*
den angehört, so erk

Salmon, *Anal. Geom.* d. Ra

196. Zwei Punkte, von denen
zwei confocalen Ellipsoiden angehö
respondierende bezeichnet, wenn

$$\frac{x}{a} = \frac{X}{A}, \quad \frac{y}{b} = \frac{Y}{B}, \quad \frac{z}{c}$$

durch ihre Coordinaten erfüllt sin

Da nach dem im Artikel 168 gefund

$$x^2 = \frac{a^2 a'^2 a''^2}{(a^2 - b^2)\ (a^2 - c$$

die Grösse

$$\frac{x^2}{a^2}$$

constant bleibt, so lange a'^2, a''^2 unveränd
der Punkt der Durchschnittslinie von zwei
den angehört, so erkennen wir, dass

1,

die Relation

pse für die Durch-
lfläche und eine Hy-
len mit zwei Mantel-

: 0,

daher

= 0;

onfocaler Kegelschnitte.

Ebene der Kr
Projection ein

Man erkennt
nen Satzes: Wen
schaftliche Kr
ihre Schnittcu
selben Kreisso
fachen Bemerkung

in die Gleichung

einen Kreis repräs
beiden Gleichunger

auf Kreisgleichunge

Wir halten es
speciellen Satz dire

Projection ein Kreis.

Man erkennt diesen Satz leicht
nen Satzes: Wenn zwei Flächen z
schaftliche Kreisschnitte hab
ihre Schnittcurve gehende Flä
selben Kreisschnitte. Und die
fachen Bemerkung hervor, dass das

$$z = 0$$

in die Gleichung

$$U + kV =$$

einen Kreis repräsentieren muss, sol
beiden Gleichungen

$$U = 0, \quad V$$

auf Kreisgleichungen reduciert.

Wir halten es aber für nützlich
speciellen Satz direct zu beweisen.

Achse der y, welche eine Gerade in der Ebene des Kreisschnittes ist, und eine Normale zu ihr in dieser Ebene und behalten daher die y unverändert, während das neue x^2 gleich dem alten

$$x^2 + z^2$$

wird. Aus der Gleichung der Ebene des Kreisschnittes folgt

$$z^2 = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2} \cdot x^2$$

und das neue x^2 ist daher

$$= \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^2 - c^2}{b^2 - c^2} \cdot x^2.$$

Da nun für die Durchschnittspunkte der Flächen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

die Gleichung

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2} x^2 + \frac{b^2 - c^2}{b^2} y^2 = r^2 - c^2$$

gilt, so folgt durch Substitution des eben bestimmten Werthes von x^2

$$\frac{b^2 - c^2}{b^2} (x^2 + y^2) = r^2 - c^2,$$

was den Satz beweist.

Man wird bemerken, dass wir, um die Projection auf die Ebenen der Kreisschnitte zu erhalten, y unverändert gelassen und für x^2 den Werth $\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2} \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot x^2$ substituiert haben.

Um aber wie im letzten Artikel den irgend einem Punkte der Fläche entsprechenden Punkt zu finden, war die Substitution

$$\frac{a^2}{a^2 - c^2} x^2, \quad \frac{b^2}{b^2 - c^2} y^2$$

respective für

$$x^2 \quad \text{und} \quad y^2$$

zu vollziehen. Man sieht daraus, dass die Quadrate der ersteren Coordinaten zu denen der letzteren das constante Verhältniss

$$\frac{b^2 - c^2}{b^2}$$

besitzen. Daher können wir aus den Ergebnissen des letzten Artikels unmittelbar schliessen, dass die Projection des Durch-

schnitts von zwei confocalen Flächen zweiten Grades auf eine Kreisschnittebene der einen von ihnen ein Kegelschnitt ist, der die entsprechenden Projectionen der Kreispunkte zu Brennpunkten hat; und ferner, dass für jede durch ihre Gleichung

$$\Phi\ (a',\ a'') = 0$$

gegebene Curve auf dem Ellipsoid die algebraische Gleichung ihrer Projection auf die Ebene der Kreisschnitte abgeleitet werden kann.

199. Die Entfernung zweier Punkte, von denen je einer auf einem von zwei confocalen Ellipsoiden liegt, ist der Entfernung der ihnen entsprechenden Punkte gleich.

Wir haben

$$(x - X)^2 + (y - Y^2) + (z - Z)^2$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 - 2\,(xX + yY + zZ),$$

und da nach Artikel 169

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b'^2 + c''^2,\ X^2 + Y^2 + Z^2 = A^2 + B'^2 + C''^2$$

und für die entsprechenden Punkte

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = A^2 + b'^2 + c''^2,\ x'^2 + y'^2 + z'^2 = a^2 + B'^2 + C''^2$$

ist, so ist die Summe der Quadrate der Centralstrahlen nach beiden Punkten für die zwei entsprechenden Punkte dieselbe Grösse; und das Theorem ist bewiesen durch die weitere Bemerkung, dass die Grössen

$$xX,\ \ yY,\ \ zZ$$

respective gleich sind den andern

$$x'X',\ \ y'Y',\ \ z'Z',$$

weil man hat

$$X' = \frac{Ax}{a},\quad x' = \frac{aX}{A},\ \text{etc.}$$

diess von J. Jvory herrührende Theorem ist von Wichtigkeit in der Theorie der Attractionen.

200. Um eine Eigenschaft der Flächen zweiten Grades zu erhalten, welche der Eigenschaft der Kegelschnitte analog wäre, nach der die Summe der Focaldistanzen constant ist, gab Jacobi dieser letzteren Eigenschaft den fol-

genden Ausdruck: Wenn man die beiden Endpunkte C, C' der grossen Achse der Ellipse betrachtet, so vereinigt dieselbe Relation

$$\varrho + \varrho' = 2a,$$

welche die Entfernungen von C und C' von irgend einem Punkte ihrer Verbindungslinie verknüpft, auch die Entfernungen der Brennpunkte von irgend einem Punkte der Ellipse.

Wenn wir nun in analoger Weise im Hauptschnitt des Ellipsoids die drei Punkte nehmen, welche in dem vorher (Artikel 196) auseinander gesetzten Sinne dreien Punkten der Focalellipse entsprechen, so vereinigt dieselbe Relation, welche zwischen den Entfernungen jener Punkte von einem beliebigen Punkte ihrer Ebene stattfindet, auch die Entfernungen der letztern Punkte von irgend einem Punkte der Fläche. In der That sind nach Artikel 198 die Entfernungen der Punkte eines confocalen Kegelschnitts von einem Punkte der Fläche gleich den Entfernungen des diesem Letzteren entsprechenden Punktes der Hauptebene von den drei Punkten des Hauptschnittes*).

201. Wenn umgekehrt der Ort eines Punktes zu bestimmen wäre, dessen Entfernungen von drei festen Punkten durch dieselbe Relation vereinigt sind, welche die Entfernungen der Eckpunkte eines Dreiecks mit

---

*) Durch geometrische Betrachtung hat Townsend gezeigt („Cambridge and Dublin Mathematical Journal“, Vol. III, p. 154), dass diese Eigenschaft nur den Punkten der modularen Focalkegelschnitte angehört. In der That sind, wie aus den Formeln des Artikel 196 erhellt, die Punkte der Ebene y, welche irgend einem Punkte (x', y', z') des Ellipsoids entsprechen, imaginär.

Townsend leitet Jacobi's Methode der Generation aus MacCullagh's Modular-Eigenschaft ab. Denn wenn man durch irgend einen Punkt der Fläche eine zu einem Kreisschnitt parallele Ebene legt, so schneidet dieselbe die den drei festen Focalpunkten entsprechenden Directricen in einem Dreieck von unveränderlicher Grösse und Gestalt, und die Entfernungen des Punktes der Fläche von den Brennpunkten sind in einem constanten Verhältniss zu seinen Entfernungen von den Ecken dieses Dreiecks. Und man kann ein ähnliches Dreieck bilden, dessen Seiten in bestimmtem Verhältniss verkleinert oder vergrössert sind, für welches die Entfernungen der Ecken vom Punkt (x', y', z') seinen Entfernungen von den Brennpunkten gleich sind.

den Seiten a, b, c von irgend einem Punkte seiner Ebene verbindet, so erhält man, wenn ϱ, ϱ', ϱ'' jene drei Entfernungen bezeichnen, nach Artikel 50

$$a^2(\varrho^2-\varrho'^2)(\varrho^2-\varrho''^2)+b^2(\varrho'^2-\varrho^2)(\varrho'^2-\varrho''^2)+c^2(\varrho''^2-\varrho^2)(\varrho''^2-\varrho'^2)$$
$$-a^2(b^2+c^2-a^2)\varrho^2-b^2(c^2+a^2-b^2)\varrho'^2-c^2(a^2+b^2-c^2)\varrho''^2+a^2b^2c^2$$
$$=0;$$

und da $(\varrho^2-\varrho'^2)$, etc. als Functionen der Coordinaten nur vom ersten Grade sind, so ist der gesuchte Ort vom zweiten Grade.

Indem man zeigt, dass diese Gleichung von der Form

$$S+LM=0$$

ist, wo S eine unendlich kleine Kugel bezeichnet, welche einen solchen Punkt zum Centrum hat, weist man nach, dass jene drei Punkte, von denen die Entfernungen gemessen werden, Focalpunkte der Fläche zweiten Grades sind. Jener Nachweis ist geführt, wenn das Resultat der Substitution

$$\varrho^2=0$$

in die vorige Gleichung als in lineare Factoren zerfallend erkannt ist. Dasselbe ist

$$a^2(\varrho'^2-c^2)(\varrho''^2-b^2)+(b^2\varrho'^2-c^2\varrho''^2)(\varrho'^2-\varrho''^2+b^2-c^2),$$

nnd wenn wir

$$\varrho'^2-\varrho^2-c^2=L,\quad \varrho''^2-\varrho^2-b^2=M$$

setzen, so geht es in die Gestalt

$$a^2LM+(b^2L-c^2M)(L-M)$$

oder

$$b^2L^2-2bcLM\cos A+c^2M^2=0$$

über, wo A den Winkel des aus a, b, c gebildeten Dreiecks bezeichnet, welcher a gegenüberliegt. Diese Gleichung zerfällt in zwei imaginäre Factoren und beweist somit, dass der betrachtete Punkt zu den Focalpunkten der modularen Gattung gehört.

202. Der Ort der Berührungspunkte paralleler Tangentenebenen einer Reihe von confocalen Flächen zweiten Grades ist eine Hyperbel.

Wir nehmen an, dass α, β, γ die Richtungswinkel der gemeinschaftlichen Normalen dieser Tangentenebenen bezeichnen und erkennen dann nach der Formel

$$\cos\alpha=\frac{px'}{a^2}\quad\text{(Artikel 85)}$$

durch Substitution von

$$r \cos \alpha' \quad \text{für} \quad x',$$

dass die Richtungscosinus des Radius vector irgend eines Berührungspunktes durch

$$\frac{a^2 \cos \alpha}{rp}, \quad \frac{b^2 \cos \beta}{rp}, \quad \frac{c^2 \cos \gamma}{rp}$$

dargestellt sind. Wenn wir dann nach Artikel 14 die Richtungscosinus der Normale der Ebene des Radius vector und der Normale der Tangentenebene bilden, so erhalten wir für Φ als den vom Radius vector mit dieser Normale gebildeten Winkel dieselben in der Form

$$\frac{(b^2 - c^2) \cos \beta \cos \gamma}{rp \sin \Phi}, \quad \frac{(c^2 - a^2) \cos \gamma \cos \alpha}{rp \sin \Phi}, \quad \frac{(a^2 - b^2) \cos \alpha \cos \beta}{rp \sin \Phi}.$$

Der gemeinschaftliche Nenner dieser Ausdrücke repräsentiert aber das Doppelte des Inhalts des Dreiecks, welches vom Radius vector und jener Normale bestimmt wird; die doppelten Inhalte der Projectionen dieses Dreiecks auf die Coordinatenebenen sind daher durch

$$(b^2 - c^2) \cos \beta \cos \gamma, \quad (c^2 - a^2) \cos \gamma \cos \alpha, \quad (a^2 - b^2) \cos \alpha \cos \beta$$

ausgedrückt, und da diese Projectionen für ein System von confocalen Flächen constant sind, so ist für ein solches System sowohl die Ebene dieses Dreiecks, als auch seine Grösse constant. Wenn also CM die Normale der betrachteten Reihe von Tangentenebenen und PM das auf dieselbe von einem Berührungspunkte P gefällte Perpendikel bezeichnen, so ist die Ebene und die Grösse des Dreiecks CPM unveränderlich und der Ort von P daher eine Hyperbel, für welche CM eine Asymptote ist.

203. Das dem System confocaler Flächen

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda^2} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda^2} = 1$$

entsprechende reciproke System ist ein System concyclischer Flächen

$$(a^2 - \lambda^2) x^2 + (b^2 - \lambda^2) y^2 + (c^2 - \lambda^2) z^2 = R^4.$$

Diese Gleichung stellt ein System von Flächen zweiten Grades dar, welche durch eine gemeinschaftliche Curve gehen und welchem die Punkt-Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

angehört. Daher ist das reciproke System in eine gemeinschaftliche developpable Fläche eingeschrieben, und manche der in diesem Kapitel für confocale Flächen abgeleiteten Eigenschaften ergeben sich als specielle Fälle von allgemeinen Eigenschaften derjenigen Flächen, welche einer gemeinschaftlichen developpabeln Fläche eingeschrieben sind*). (Man vergleiche Artikel 132, 170 122 und 175.)

Da der aus einem Punkte eines Focalkegelschnitts an die Fläche gelegte Tangentenkegel ein Umdrehungskegel ist, d. h. ein solcher, welcher mit dem unendlich entfernten imaginären Kreise (Artikel 134) eine doppelte Berührung hat, so ergiebt sich, dass von jedem Punkte eines Focalkegelschnitts zwei imaginäre Ebenen ausgehen, welche jede confocale Fläche berühren, und wir erkennen geometrisch die Existenz dieser developpabeln Fläche, deren Tangentenebenen sämmtliche confocale Flächen berühren. Wir erkennen auch, dass sie mit derjenigen developpabeln Fläche identisch ist, welche von den durch die Tangenten des unendlich entfernten imaginären Kreises gehenden Tangentenebenen der Fläche gebildet wird. Man bildet ihre Gleichung, indem man die Discriminante der Gleichung der confocalen Flächen in Bezug auf λ^2 bildet. Der unendlich entfernte imaginäre Kreis und die Focalkegelschnitte sind die Doppellinien dieser Fläche**).

204. Wir schliessen endlich diesen Theorien die auf die Lehre von der Krümmung der Flächen zweiten Grades bezüglichen Hauptsätze an, als welche mit dem Gegenstand dieses Ka-

---

*) Vergl. auch Chasles' „Aperçu historique“ p. 413 f. der deutschen Ausgabe und im „Quarterly Journal of Mathem.“ Vol. III, p. 155 eine Note von Ferrers.

**) Eine ausführliche Darstellung der Theorie der confocalen und concyclischen Flächen zweiten Grades und der entsprechenden sphärischen Kegelschnitte von diesem Gesichtspunkte aus, hat der Herausgeber im VII. Bd. der „Zeitschrift für Mathem. u. Physik“ (1862) gegeben (p. 25 — 45, 217 — 238, 285 — 313). Die Veröffentlichungen von Chasles („Comptes rendus“ t. L, p. 623, p. 1055, p. 1110) und von Cremona („Annali di Matem.“ t. III, p. 257) sind darin im Zusammenhang vorgelegt.

grenzt hat
P und den zu
en und P' der
ach Artikel 70
R),

auf die Tangen-
reieck CMP dem

ist. Wenn daher für d
ung einer Fläche zwei
$Ax^2 + 2Bxy + Cy$
gegeben ist, so sind d

entsprechenden Schnitt

Und wenn die G
Centrum transformiert
Grade unverändert blei
$Ax^2 + 2Bxy + C$
und die Quadrate der in
schnitte sind

A

ist. Wenn daher für die Ebene xy als Tang
ung einer Fläche zweiten Grades durch

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Lxz + 2Myz +$$

gegeben ist, so sind die Krümmungsradien

$$y = 0, \quad x = 0$$

entsprechenden Schnitte respective

$$= \frac{E}{A} \text{ und } = \frac{E}{C}.$$

Und wenn die Gleichung zu parallel
Centrum transformiert wird, wobei die
Grade unverändert bleiben, so wird sie

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Lxz + 2M$$

und die Quadrate der in den Achsen der x
schnitte sind

Ausdrücke

hsen des Schnit-
ne bestimmt (Ar-

unter dem Winkel
tspricht, wird ge-
tenachsen um den

$\cos\theta$

der Form

stant in den Punk
gleichen *Abstand*
Ihre Summe *ergi*

$$r_1 + r_2^2 = \frac{}{}$$

d. h. in Punkten, w
fernt sind, ist die S
dem Abstande der
gekehrt proportion
tische Gleichung zur Be
einem Punkte, die man

$$\frac{x^2}{a^2 - pr} +$$

darstellen kann. Für di
zu den Kreispunkten der
das Folgende.

gleichen Abstand vom Centrum hat.

Ihre Summe ergiebt sich

$$r_1 + r_2^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - (x'^2 +}{p}$$

d. h. in Punkten, welche vom Centru
fernt sind, ist die Summe der Haupth
dem Abstande der Tangentenebene v
gekehrt proportional. Beide Relationen
tische Gleichung zur Bestimmung der Haup
einem Punkte, die man in der Form

$$\frac{x^2}{a^2 - pr} + \frac{y^2}{b^2 - pr} + \frac{z^2}{c^2 -}$$

darstellen kann. Für die Gleichheit ihrer
zu den Kreispunkten der Fläche. Ihre Gest
das Folgende.

Wenn man die Hauptkrümmungsradien mittelst der Halbachsen der durch den betrachteten Punkt gehenden confocalen Flächen ausdrückt, so erhält man leicht den zuerst von Lamé ausgesprochenen Satz: Die sechs Hauptkrümmungshalbmesser der drei in einem Punkte sich schneidenden confocalen Flächen zweiten Grades bilden zwei Gruppen so, dass die Summe der Producte der Halbmesser beider Gruppen gleich Null ist.*)

Und ebenso den von Bertrand, nach welchem für je ein Paar der confocalen durch einen Punkt gehenden Flächen die Verhältnisse der beiden Hauptkrümmungsradien einer Fläche die Einheit zur Summe geben; ein Satz, der einen interessanten constructiven Zusammenhang der sechs Hauptkrümmungscentra begründet.

Es ergiebt sich aus Artikel 171, dass jeder der Hauptschnitte die Normale einer der beiden durch den Punkt gehenden confocalen Flächen enthält.

In Folge dessen ist der Durchschnitt einer Fläche zweiten Grades mit einer ihr confocalen Fläche eine Curve, für welche die Tangente immer eine der Hauptkrümmungsrichtungen der Fläche für den Berührungspunkt ist. Eine solche Curve nennt man eine Krümmungslinie der Fläche.

In dem Falle des Hyperboloids mit einer Mantelfläche ist der Centralschnitt eine Hyperbel und die Schnitte, deren Spuren in der Tangentenebene den Asymptoten dieser Hyperbel parallel sind, haben unendlich grosse Krümmungsradien, d. h. sie sind, wie wir schon wissen, gerade Linien. Beim Hindurchgehen durch einen dieser Schnitte wechselt der Krümmungsradius das Zeichen; d. h. die Richtung der Convexität von Schnitten auf der einen Seite

---

*) G. Lamé, „Leçons sur les Coordonneés curvilignes et leurs diverses applications“ Paris 1859. §. LXXII. Für die Theorie der confocalen Flächen und allgemeiner der Orthogonalflächensysteme ist das Studium dieses Werkes besonders dann zu empfehlen, wenn es sich um die Bedeutung dieser Theorien für die Anwendung der Mathematik auf die allgemeine Physik handelt. Hierher gehören besonders die Vorlesungen VII und VIII; von allgemeinem Interesse sind in derselben Richtung die Vorlesungen III und IV.

von einer dieser Linien ist derjenigen der Schnitte auf der andern Seite entgegengesetzt.

Wenn man zu den Normalen einer Fläche zweiten Grades in Punkten einer Schaar von Krümmungslinien Parallelen durch das Centrum zieht, so entstehen zwei Systeme von confocalen Kegeln; und die durch das Centrum gehenden Parallelebenen zu den Tangentenebenen der Fläche in den Punkten derselben Krümmungslinien umhüllen die Reciprocalkegel der ersteren.

Der Satz des Artikels 174 kann als eine Definition der Krümmungslinien angesehen werden. Dann ergiebt sich z. B. nach dem im Eingang des Artikels 204 ausgesprochenen Gesetze, dass das Verhältniss der beiden Hauptkrümmungshalbmesser in jedem Punkte dem reciproken Werth des Verhältnisses der Quadrate der Halbdurchmesser gleich ist, welche den entsprechenden Krümmungslinien parallel sind.

Wenn man die Grösse p mittelst der Achsen der confocalen Flächen ausdrückt (Artikel 173), und den analogen Ausdruck für den Hauptkrümmungsradius benutzt, so ergeben sich unter andern noch die folgenden Relationen: Das Product des Hauptkrümmungshalbmessers in die dritte Potenz des Abstandes der Tangentenebene vom Centrum ist für alle Punkte einer Krümmungslinie von constantem Werthe.

Das Verhältniss des Hauptkrümmungshalbmessers in Punkten einer Krümmungslinie zur dritten Potenz des ihrer Tangente parallelen Halbdurchmessers ist constant.

207. Die zwei Hauptkrümmungscentra sind die Pole der Tangentenebene in Bezug auf die beiden durch den Berührungspunkt gehenden confocalen Flächen. (Vergl. „Analyt. Geom. d. Kegelschn.“ Artikel 261.)

Denn diese Pole liegen nach Artikel 175 in der Normale der Ebene und ihre Entfernungen von derselben

$$\frac{a^2 - a'^2}{p} \quad \text{und} \quad \frac{a^2 - a''^2}{p} \quad \text{(Artikel 176)}$$

sind die Längen der Hauptkrümmungsradien.

Nach Artikel 176 ergeben sich daher auch die Coordinaten der Centra der beiden Hauptkrümmungskreise, nämlich

$)^3 = 0.$

welche den Punkten
entsprechen, als für
curve zweier Flächen

das Differential der
selbst von der Fläche

n Gleichungen liefert
h folgendes Verfahren
nn man in die Coor-
207 die Werthe von
ält man

$a^2)\,(b^2 - c^2) = b'^6 b''^2,$
$c''^2.$

Hauptschnittes der
Artikel 204 ergiebt

weil c in jedem du
Achse ist. Dann sin
dinaten des entspre

d. h. sie sind die Po
x', y' in Bezug auf de
Der Ort der entspre
Hauptschnitts in Bez

$$\frac{a}{(a^2}$$

Und der Schn
welcher nothwen

Artikel 204 ergiebt,

$$\frac{c^2}{p},$$

weil c in jedem durch die Achse der z
Achse ist. Dann sind nach den Formeln
dinaten des entsprechenden Centrums

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2} x', \quad \frac{b^2 - c}{b^2}$$

d. h. sie sind die Pole der Tangente des
x', y' in Bezug auf den entsprechenden Foc
Der Ort der entsprechenden Centra ist
Hauptschnitts in Bezug auf den Focalkeg

$$\frac{a^2 x^2}{(a^2 - c^2)^2} + \frac{b^2 y^2}{(b^2 - c^2)}$$

Und der Schnitt der Fläche du
welcher nothwendig vom zwölfte

$+ \eta^2 + \zeta^2)$,
on $(a^2 - a'^2)$ die

$\eta^2 + c^2\zeta^2 - 1)$*),

merkt, dass ξ, η, ζ
achten sind; denn
uf die Kugel

hnen, so ist

ene und ξ, η, ζ sind
nebene in den Achsen

Tangential-Coordinates“

dar. *Dann ergie*
Paaren, nämlic
N

die Achsen *in*
das Product *de*
mente *constant*
*h*er in jeder *Ach*
ihr*em Centralpu*
her gle*ich weit*
respective d*urch*

$$x_1 = \pm \frac{h}{a}$$

---

*) Man *vergleiche*
p. 345—364. T. *del Be*

Paaren, nämlich

$$N_{12},\ N_{13};\quad N_{21},\ N_{23};\quad N$$

die Achsen in Punktepaaren sch
das Product der vom Centrum a
mente constant ist; diese Punkte
her in jeder Achse eine Involution
ihrem Centralpunkt hat, und der
her gleich weit entfernt vom
respective durch die Coordinate

$$x_1 = \pm \frac{hk}{a'},\quad y_1 = \pm \frac{h\sqrt{k^2}}{\sqrt{a'^2}}$$

$$z_1 = \pm \frac{k\sqrt{k^2}}{\sqrt{a'^2}}$$

---

*) Man vergleiche Heilmann, „Journal
p. 345—364. T. del Beccaro „Annali di M

,

$\sqrt{h^2}\sqrt{-1}$;

$\sqrt{1}$,

$\sqrt{-1}$;

$\sqrt{-a''^2}\sqrt{-1}$,

;

,

$\sqrt{a''^2-h^2}\sqrt{-1}$;

$\zeta = 0$, $\frac{}{x_2}$

für U_3: $\xi = 0$, $\frac{\eta}{y_3}$

$\zeta = 0$, $\frac{\xi}{x_3}$

dargestellt werden,
Vorhergehenden die
Die beiden H
gen Punkte einer
malebenen ihrer
Krümmungscurve
Fläche Punktepaa
punkte gleichwei
jenes Punktes co
Fläche in ihren
Letzteren.

für U_3: $\xi = 0, \frac{\eta}{y_3} + \frac{\zeta}{z_3} - 1 = 0;\ \eta =$

$$\zeta = 0, \frac{\xi}{x_3} + \frac{\eta}{y_3} - 1 = 0$$

dargestellt werden, aus deren Form dann
Vorhergehenden die nachfolgenden Sätze

Die beiden Hauptnormaleben
gen Punkte einer Fläche zweiten
malebenen ihrer sich in diesem P
Krümmungscurven, bestimmen
Fläche Punktepaare einer Involu
punkte gleichweit vom Centrum
jenes Punktes constant sind, un
Fläche in ihren Kreispunkten
Letzteren.

spective

$-l)$,

$2l)$;

$-a_2)\sqrt{-1}$,

$+2l)$;

$a_3+l)\sqrt{-1}$,

,

$_3$

ormalen der Flä-

$\zeta = 0$;

$\zeta = 0$;

gene unter ihn
Fläche zwei Ebe
normalebenen
schel bilden. Be
des zweiten Focalpu

Da die Haupt
ander senkrecht
beiden andern Eb
Normale mit den
ten Winkel.

Die aus den F
welche durch di
Fläche gehen, un
werden als ihre Fo
bezeichnet, wenn
hören. Die Länge
liebigen Punkte d

Fläche zwei Ebenen bestimmen, w
normalebenen dieses Punktes ein
schel bilden. Bei den nicht centrischen
des zweiten Focalpunktes der Achse der

Da die Hauptnormalebenen ein
ander senkrecht sind, so halbier
beiden andern Ebenen des Büschel
Normale mit den Focalpunkten be
ten Winkel.

Die aus den Focalcentren bes
welche durch die entsprechende
Fläche gehen, und sie offenbar in d
werden als ihre Focalkugeln und sp
bezeichnet, wenn ihre Centra der
hören. Die Längen der Tangenten
liebigen Punkte der Fläche an ei

$$\frac{}{},$$

$$\frac{-a'''^2)}{-a'''^2},$$

$$^2\,(h^2-a'''^2)}{k^2-a'''^2}.$$

ır je eine, wel-

l^2),
l^2),
l^2)

Fläche sind dann

$$\sqrt{h^2-a'''^2}\,\sqrt{-1})^2,$$
$$\sqrt{k^2-a'''^2})^2;$$

$$\xi = \pm \frac{a'^2}{x_2},$$

und für die von U_3

$$\xi = \pm \frac{a'^2}{x_3}, \quad \eta$$

$$\xi = \pm \frac{a''^2}{x_3}, \quad \eta$$

Für die nicht c

$$\xi = -$$
$$\xi = -$$
$$\xi = -$$

Endlich drücken
Punktes (x, y, z)
nen in *elliptische*
einen Punkt der *Fläc*

$$\xi = \pm \frac{}{x_2}, \quad \eta = \pm \frac{}{y_2},$$

und für die von U_3, bezüglich U_1 und U

$$\xi = \pm \frac{a'^2}{x_3}, \quad \eta = \pm \frac{(a'^2 - h^2)}{y_3},$$

$$\xi = \pm \frac{a''^2}{x_3}, \quad \eta = \pm \frac{(a''^2 - h^2)}{y_3},$$

Für die nicht centralen Flächen ergi

$$\xi = -(a_1 + 2a_2), \quad \xi = (2$$
$$\xi = -(a_2 + 2a_1), \quad \xi = (2$$
$$\xi = -(2a_1 - a_3), \quad \xi = -$$

Endlich drücken sich die Abstän
Punktes (x, y, z) einer Fläche von
nen in elliptischen Coordinaten fo
einen Punkt der Fläche U_1

rechend

und die daran

$$= \frac{a'^2}{a''^2} \quad ;$$

$$= \frac{a'^2 - h^2}{a''^2 - h^2};$$

$$= \frac{a'^2 - k^2}{a''^2 - k^2},$$

ch Multiplication

$$\frac{r_1''^2}{r_1''^2} = 1, \text{ etc.}$$

Für eine Flä
Centrum *ist die G*
Richtung dieselbe
tem Sinn. Und für
ist das Verhältnis
von der zugehörige

215. *Für die dr*
focalen Flächen U_1
Achse gelegenen F
spectiven *Directore*

$D_2^{(1)}$, $D_3^{(}$

ist das Product de
dreien *unter* ihnen,

D

dem Product seiner
gen gleich.

Centrum ist die Grösse dieser Entf
Richtung dieselbe, aber sie sind vo
tem Sinn. Und für alle Punkte eine
ist das Verhältniss des Focalstrah
von der zugehörigen Directorebene

215. Für die drei durch einen Pu
focalen Flächen U_1, U_2, U_3 und drei
Achse gelegenen Focalcentra F_1, F_2
spectiven Directorebenen

$$D_2^{(1)},\ D_3^{(1)};\quad D_3^{(2)},\ D_1^{(2)};\quad D_1$$

ist das Product der Entfernungen
dreien unter ihnen, wie

$$D_2^{(1)},\ D_3^{(2)},\ D_1^{(3)}$$

dem Product seiner Entfernungen
gen gleich.

$$\frac{}{}$$,

$$\frac{}{} - 1,$$

$$\frac{}{} - 1.$$

calstrahl eines
ist gleich der
en Halbachsen
sind und jenen
er Krümmungs-
n Grades ist die
nen an zwei con-
nden Focalstrah-
centra gehenden
Krümmungslinie
oder andern Sy-
t. Und zwar ist spe-
mit einem zweifachen

Artikel 196, 197, 20

Und: Das Prod
jugierten *Focalku*
ihrer drei Halbac

216. Zu ferneren
für die Tan*genten de*
Krümmungslinien gelte
zu ihnen *parallelen* Ha
für die Gleichun*gen d*

$$\xi = - \frac{a' a'' \sqrt{k^2 -}}{h a''' \sqrt{a'^2 -}}$$

$$\eta = \frac{k \sqrt{a'^2 - h^2}}{h \sqrt{a'^2 - k^2}}$$

$$- \frac{\sqrt{k^2 - h^2} \sqrt{a}}{h \sqrt{k}}$$

die Differenz der zu den innern Focalkugeln des Ellipsoids gehörigen Focalstrahlen der reellen Achse des Hyperboloids,

die Summe der zu den äussern Focalkugeln des Ellipsoids gehörigen Focalstrahlen der grossen imaginären Achse des Hyperboloids gleich;

und es ist die Summe der zu den innern Focalkugeln des Hyperboloids gehörigen Focalstrahlen gleich der grossen Achse des Ellipsoids,

und die Summe der zu den äussern Focalkugeln des Hyperboloids gehörigen Focalstrahlen gleich der mittlern Achse des Ellipsoids.

Ebenso ist für die vom einfachen Hyperboloid mit dem Ellipsoid bestimmte Krümmungslinie die Summe der zu den innern Focalkugeln des Ellipsoids gehörigen Focalstrahlen gleich der grossen reellen Achse des Hyperboloids; etc.

Kurz: Je zwei sich schneidende Krümmungslinien einer Fläche zweiten Grades verhalten sich in Bezug auf drei Paare in den Achsen symmetrisch gegen den Mittelpunkt gelegene reelle oder imaginäre Punkte ganz ähnlich, wie zwei sich schneidende confocale Kegelschnitte in Bezug auf ihre Brennpunkte. (Vergl. Artikel 196, 197, 206.)

Und: Das Product der drei Focalstrahlen der conjugierten Focalkugeln einer Fläche ist dem Product ihrer drei Halbachsen gleich.

216. Zu ferneren Ergebnissen leitet uns die Vergleichung der für die Tangenten der durch einen Punkt der Fläche gehenden Krümmungslinien geltenden Gleichungen mit den Ausdrücken der zu ihnen parallelen Halbdurchmesser der Flächen; denn man hat für die Gleichungen der Tangenten:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= -\frac{a'a''\sqrt{k^2-h^2}\sqrt{k^2-a'''^2}}{ha'''\sqrt{a'^2-k^2}\sqrt{k^2-a''^2}}\zeta + \frac{a'a''k}{a'''h}, \\ \eta &= \frac{k\sqrt{a'^2-h^2}\sqrt{a''^2-h^2}\sqrt{k^2-a'''^2}}{h\sqrt{a'^2-k^2}\sqrt{k^2-a''^2}\sqrt{h^2-a'''^2}}\zeta \\ &\quad - \frac{\sqrt{k^2-h^2}\sqrt{a'^2-h^2}\sqrt{a''^2-h^2}}{h\sqrt{k^2-a'''^2}}; \end{aligned}\right\} \text{für } T_{12};$$

$$= \left(\frac{d_3'}{\sqrt{-1}}\right)^2,$$

$$= \left(\frac{d_3}{\sqrt{-1}}\right)^2,$$

$$= \left(\frac{d_2'}{\sqrt{-1}}\right)^2;$$

Krümmungslinie
ades (U_1) ist das
en conjugierter
läche (U_2) dem
rsten Fläche (U_1)
in jenem Punkte

Centrum leicht die

Entfernung der

folgen.

Die vom gemeinsc
ebenen der confocalen

$P_1 =$

$P_2 =$

$P_3 =$

die von den Focalpunk
von U_1 gefällten Norma

---

*) Vergl. „Crelle's
sammenhängenden weitere
ville etc., werden in den

Brennpunkte der Hauptschnitte einer Fläche u_1 zum Anfangspunkt wählt und die durch die Fläche u_2 auf ihr bestimmte Krümmungslinie betrachtet, so giebt die von jenem auf die Tangentenebene von u_1 in einem beliebigen Punkte der bezeichneten Krümmungslinie gefällte Normale mit der Quadratwurzel seines auf die Focalkugel von u_2 bezüglichen Focalstrahls ein constantes Product — analog dem schönen Satze von Joachimsthal*) über die Krümmungslinien der centrischen Flächen zweiten Grades. (Artikel 174.)

Für eine Krümmungslinie von u_1, welche durch die Fläche u_2 bestimmt wird, ist die Normale, welche von einem Focalcentrum F_2 von n_2 auf die Tangentenebene von u_1 in einem ihrer Punkte gefällt wird zur Quadratwurzel seines auf die Focalkugel von u_2 bezogenen Focalstrahls in constantem Verhältniss. Das Product der auf die Tangentenebene in einem Punkte der Fläche u_3 von den Focalcentren der durch ihn gehenden confocalen Flächen u_1, u_2 gefällten Normalen ist constant.

217. Den hier sich ergebenden Beweis und neuen Ausdruck des Joachimthal'schen Theorems lassen wir im Nachstehenden folgen.

Die vom gemeinschaftlichen Centrum auf die drei Tangentenebenen der confocalen Flächen in M gefällten Normalen sind

$$P_1 = \frac{\sqrt{a'^2\,(a'^2 - h^2)\,(a'^2 - k^2)}}{\sqrt{(a'^2 - a''^2)\,(a'^2 - a'''^2)}},$$

$$P_2 = \frac{\sqrt{a''^2\,(a''^2 - h^2)\,(k^2 - a''^2)}}{\sqrt{(a'^2 - a''^2)\,(a''^2 - a'''^2)}},$$

$$P_3 = \frac{\sqrt{a'''^2\,(h^2 - a'''^2)\,(k^2 - a'''^2)}}{\sqrt{(a''^2 - a'''^2)\,(a'^2 - a'''^2)}};$$

die von den Focalpunkten von U_2 und U_3 auf die Tangentenebene von U_1 gefällten Normalen sind

---

*) Vergl. „Crelle's Journal" Bd. XXVI, p. 155. Die damit zusammenhängenden weiteren Untersuchungen von Mich. Roberts, Liouville etc., werden in dem zweiten Theile dieses Werkes mitgetheilt.

$-a''^2}\sqrt{-1}\ P_2,$

$\sqrt{-1}$

$-a'''^2}\sqrt{-1}\ P_3,$

$\sqrt{-1}$

$^2-a''^2}\ P_3;$

$^2-a'''^2}\sqrt{-1}\ P_3,$

$^2}\sqrt{-1}$

$k^2-a'''^2}\sqrt{-1}\ P_3.$

$'''^2}\sqrt{-1}$

, liefern die ferneren

$$\delta_{21}' + \delta_{21}'' = 2P_1,$$
$$= \eta_{21}' + \eta_{21}'' = 2P_1,$$
$$\delta_{22}' + \delta_{22}'' = \text{etc.} = 2P_2,$$
$$\delta_{23}' + \delta_{23}'' = \text{etc.} = 2P_3,$$

auf die entsprec
U_2 bezüglichen F

Und das andere:
U_1 in Punkten ei
stimmten Krümm
einem Paare conj
gefällten Normal

Die letzte Gruppe
bei den Tangente
ten einer auf ihr d
mungslinie für di
tren der Fläche U_2
von jenen Punkten
gehenden Focalstr
Focalstrahlen und
schen Mitteln derse

Eine Quelle weiter

U_2 bezüglichen Focalstrahlen glei

Und das andere: Für die Tangenten
U_1 in Punkten einer durch die Fl
stimmten Krümmungslinie ist das
einem Paare conjugierter Focalcen
gefällten Normalen constant.

Die letzte Gruppe der vorigen Relationen
bei den Tangentenebenen der Fläc
ten einer auf ihr durch die Fläche U_2
mungslinie für die von zwei conj
tren der Fläche U_2 auf sie gefällten
von jenen Punkten an die entsprech
gehenden Focalstrahlen die arithm
Focalstrahlen und der Focalnorm
schen Mitteln derselben Linien pr

Eine Quelle weiterer Sätze wird endli

$''^2)$
,

$t''^2)$
,

.

en Punkt einer
mungslinie der
ischen ihm und
Abschnittes der
schen Proportio-
rter Focalkugeln
ränderlich.
einer durch die
linie einer nicht
ältniss des in der

Fläche zweiten Grades
werden können, deren
sammenfallen.

Diess ergiebt sich a

als Gleichung der die Du

enthaltenden Flächen zwe

Oder aus der Gleichu
primären Achsen von drei

$$a'^6 - a'^4 (h^2 + k^2 + x'$$
$$+ a'^2 \{h^2k^2 + x'^2 (h^2$$

und also für ihre Wurzeln

$$a'^2 + a''^2 + a''$$
$$a'^2 a''^2 a''$$
$$a'^2 a''^2 + a''^2 a'''^2 + a'''^2 a'$$

liefert; durch die Eliminatio

Normale von u_2 bis zu einer der Hauptebenen dieser Fläche gelegenen Abschnitts zur Quadratwurzel aus dem auf die Focalkugel von u_2 bezüglichen Focalstrahl constant.

Ueberdiess geben die Werthe der Halbmesser der Focalkugeln, wie sie aus den früher gegebenen Gleichungen dieser letzteren hervorgehen, mit den Werthen der eben bezeichneten Abschnitte der Normalen Relationen, welche zu neuen Sätzen Anlass geben, z. B.

$$\frac{R_{31}N_{11}}{R_{32}N_{12}} = \frac{\sqrt{\varphi_3'\varphi_3''}}{\sqrt{\psi_3'\psi_3''}}, \quad \frac{R_{21}N_{21}}{R_{22}N_{22}} = \frac{\sqrt{\varphi_2'\varphi_2''}}{\sqrt{\psi_2'\psi_2''}}, \text{ etc.},$$

denn man hat

$$R_{11} = \frac{\sqrt{(a'^2-h^2)(a'^2-k^2)}}{a'}, \quad R_{21} = \frac{\sqrt{a'^2(a'^2-k^2)}}{\sqrt{a'^2-h^2}},$$

$$R_{31} = \frac{\sqrt{a'^2(a'^2-h^2)}}{\sqrt{a'^2-k^2}}, \text{ etc.}$$

Eine ganz andere Richtung der Untersuchung, zusammenhängend mit den Arbeiten, welche in der Note des Artikel 203 erwähnt sind, wird wenigstens angegeben durch die

Aufgabe. Man soll zeigen, dass durch jede Krümmungslinie einer Fläche zweiten Grades drei Umdrehungsflächen zweiten Grades gelegt werden können, deren Rotationsachsen mit den Achsen der Fläche zusammenfallen.

Diess ergiebt sich aus der Betrachtung der allgemeinen Gleichung

$$U + kV = 0$$

als Gleichung der die Durchschnittslinie der Flächen zweiten Grades

$$U = 0, \quad V = 0$$

enthaltenden Flächen zweiten Grades, wenn V und U confocal sind.

Oder aus der Gleichung des Artikel 168, welche für die Quadrate der primären Achsen von drei confocalen Flächen die Bestimmungsgleichung

$$a'^6 - a'^4(h^2 + k^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2) + a'^2\{h^2k^2 + x'^2(h^2 + k^2) + y'^2k^2 + z'^2h^2\} - x'^2h^2k^2 = 0$$

und also für ihre Wurzeln a'^2, a''^2, a'''^2 die Relationen

$$a'^2 + a''^2 + a'''^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 + h^2 + k^2,$$

$$a'^2a''^2a'''^2 = x'^2h^2k^2,$$

$$a'^2a''^2 + a''^2a'''^2 + a'''^2a'^2 = h^2k^2 + x'^2(h^2 + k^2) + y'^2k^2 + z'^2h^2$$

liefert; durch die Elimination von a''^2 zwischen den beiden ersten Relatio-

nen erhält man direct die Gleichung des Umdrehungsellipsoids, welches die Achse der x zur grossen Achse hat.

Daraus ergiebt sich leicht: Alle Umdrehungsflächen dieser Reihen, welche dieselbe Achse haben und den verschiedenen Krümmungslinien desselben Systems entsprechen, sind den Focalkugeln gemeinschaftlich umgeschrieben, deren Centra derselben Achse angehören.

Das Endergebniss dieser Betrachtungen ordnet die Theorie der confocalen Flächen und der Krümmungslinien auch in dieser Beziehung dem Satze des Artikel 126 unter von den Kegelflächen zweiter Ordnung und den Kegelschnitten, welche die gemeinschaftlichen Elemente zweier Flächen zweiten Grades enthalten.

218. Nach dieser Untersuchung, die auf die Krümmungslinien der Flächen zweiten Grades und die confocalen Systeme solcher Flächen so viel mehr Licht geworfen hat, wollen wir noch einmal auf Folgerungen der Artikel 172, 173, 174 zurückkommen, welche hiermit in Zusammenhang stehen und dem Theorem von Ivory (Artikel 199) einen veränderten Ausdruck geben.

Wir denken ein von vier Krümmungslinien einer Fläche zweiten Grades gebildes Vierseit, die Tangentenebenen in seinen vier Ecken und ihre senkrechten Abstände vom Centrum, die vier Paare der Tangenten der in seinen Ecken sich schneidenden Krümmungslinien und die zu ihnen parallelen Halbdurchmesser, endlich die Hauptkrümmungsradien der Fläche, welche diesen Eckpunkten entsprechen.

Dann geben die Werthe des Artikel 173 für die Normalen vom Centrum auf die Tangentenebenen zuerst das Gesetz: In einem Krümmungslinienvierseit ist das Product der Entfernungen der Tangentenebenen in zwei Gegenecken vom Centrum dem Product der entsprechenden Entfernungen in den beiden andern Gegenecken gleich.

Und: Die acht Halbdurchmesser einer Fläche zweiten Grades, welche den Tangenten der Krümmungslinien in den Ecken eines Vierseits derselben parallel sind, zerfallen in zwei Gruppen von je vieren so, dass das Product der Halbdurchmesser der einen Gruppe dem Product der Halbdurchmesser der andern Gruppe gleich ist.

Ferner: Die Quadratsummen der Halbdurchmesserpaare einer Fläche zweiten Grades, die nach den Ge-

*) Für andere daran sich anschliessende Rel
Otto Böklen, „Analytische Geometrie des Ra

IX. Kapitel.

Kegel und sphärische Kegelschnitte.

---

219. Wenn ein Kegel — gleichviel von welchem Grade — von einer Kugel durchschnitten wird, welche seinen Scheitel zum Centrum hat, so wird offenbar der von irgend zwei Seiten des Kegels gebildete Winkel von dem die entsprechenden Punkte der Kugel verbindenden Bogen eines grössten Kugelkreises gemessen.

Ist der Kegel vom zweiten Grade, so wird die Durchschnittscurve als ein sphärischer Kegelschnitt bezeichnet. Die Analogie vieler Eigenschaften der Kegel zweiten Grades mit entsprechenden Eigenschaften der Kegelschnitte tritt dadurch deutlicher hervor, dass man jene als Eigenschaften sphärischer Kegelschnitte auffasst.*)

Genau gesprochen ist die Durchschnittslinie eines Kegels vom n^{ten} Grade mit einer Kugel eine Curve $2n^{\text{ten}}$ Grades, aber wenn der Kegel mit der Kugel concentrisch ist, so kann diese Curve auf unendlich vielen Wegen in zwei symmetrische und gleiche Theile zerlegt werden, von denen jeder als einer Curve n^{ten} Grades analog betrachtet werden kann.

Denn jedem in einer Halbkugel liegenden Punkte der Durchschnittscurve entspricht ein diametral entgegengesetzter Durchschnittspunkt in der andern Halbkugel und somit jedem Curvenzweig in der einen ein vollkommen symmetrischer in der andern.

---

*) Man vergleiche mit dieser Darstellung das Mémoir von Chasles über die sphärischen Kegelschnitte („Mém. publiès par l'académie royale des sciences etc. en Belgique“ t. VI.), oder dessen vortreffliche Uebersetzung ins Englische von Graves, Dublin 1837.

Dieser mehrfachen Möglichkeit der Theilung entspricht es, dass wir einen sphärischen Kegelschnitt ebensowohl als ein Analogon einer Ellipse als einer Hyperbel betrachten können. Der Kegel zweiten Grades schneidet die concentrische Kugel in zwei gleichen einander diametral entgegengesetzten geschlossenen Curven. Eine der Hauptebenen des Kegels schneidet keine von beiden Curven und die Betrachtung der Halbkugeln, in welche durch sie die Kugel zerfällt, zeigt uns die Curve als eine geschlossene und der Ellipse analog. Für die den Hauptebenen des Kegels, welche die Curven schneiden, entsprechenden Halbkugeln erscheint aber die Durchdringung als eine aus zwei entgegengesetzten Zweigen bestehende Curve, analog einer Hyperbel.

Die Durchschnittscurve einer beliebigen Fläche zweiten Grades mit einer concentrischen Kugel ist offenbar ein sphärischer Kegelschnitt.

220. Man hat die sphärischen Curven vermittelst sphärischer Coordinatensysteme untersucht, welche nach Analogie des Systems von Cartesius gebildet sind. Man wählte zwei sich rechtwinklig durchschneidende grösste Kreise OX und OY als Coordinatenachsen und fällte von einem beliebigen Punkte der Kugel P Normalen PM, PN auf dieselben; da diese Normalen nicht, wie bei Cartesischen Coordinaten in der Ebene, den ihnen gegenüberliegenden Seiten des Vierecks $OMPN$ gleich sind, so ist es von unterscheidendem Einflusse in der Ausführung des sphärischen Coordinatensystems, ob wir die Normalen PM, PN selbst oder die von ihnen in den Achsen gebildeten Abschnitte OM, ON als Coordinaten ansehen.

Gudermann hat in seiner Abhandlung über die Sphärik*) die Tangenten der Abschnitte OM, ON als Coordinaten gewählt.

Wenn man die Tangentenebene der Kugel im Punkte O betrachtet und die Schnittpunkte m, n, p der geraden Verbindungslinien des Centrums und der Punkte M, N, P mit dieser Ebene bestimmt, so sind Om, On die Cartesischen Coordinaten des Punktes p und zugleich die Tangenten der Bogen OM, ON. Da-

---

*) Vergl. „Crelle's Journal“ Bd. VI, p. 240. Man findet eine klare Darstellung dieses Systems auch in der Uebersetzung des Mémoirs von Chasles durch Graves, die wir schon anführten.

her ist die Gleichung einer sphärischen Curve in dem Coordinatensystem von Gudermann in der That nur die Gleichung der ebenen Curve nach Cartesischen Coordinaten, in welcher der aus dem Centrum der Kugel über der sphärischen Curve beschriebene Kegel von der Tangentenebene des Anfangspunktes *O* geschnitten wird.

Und wenn wir die sinus der Normalen *PM*, *PN* als Coordinaten wählen, so erhellt in derselben Art, dass die Gleichung einer sphärischen Curve in solchen Coordinaten mit der Gleichung der Orthogonalprojection dieser Curve auf eine der Tangentenebene im Punkte *O* parallele Ebene übereinstimmt.

Uns scheint es jedoch, dass die Eigenschaften sphärischer Curven einfacher und directer als aus den Gleichungen irgend welcher ebener Curven, in die sie projiciert werden können, aus den Gleichungen der Kegel hervorgehen, welche sie mit dem Centrum verbinden. Wir nehmen damit die in den Artikeln 32—36 gegebenen Entwickelungen einfach wieder auf und übertragen sie auf die Kugelfläche.

221. Wenn die Coordinaten irgend eines Punktes *P* der Kugel in die Gleichung einer durch das als Anfangspunkt der Coordinaten gedachte Centrum gehenden Ebene substituiert werden, welche die Kugel in einem grössten Kreise *AB* schneidet, so bezeichnet das Resultat dieser Substitution die Länge der von *P* auf diese Ebene gefällten Normalen oder den sinus des sphärischen Bogens, der durch *P* normal zu dem grössten Kreise *AB* gelegt ist.

Mit Hilfe dieses Princips können die Gleichungen von Kegeln in einer Art, welche genau der Interpretationsmethode für die Gleichungen ebener Curven entspricht, als Ausdrucksformen für Eigenschaften sphärischer Curven interpretiert werden.

Wenn nämlich nun

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0$$

die Gleichungen zweier durch das Centrum gehenden Ebenen bezeichnen, Gleichungen, die man auch als diejenigen der durch sie in der Kugel bestimmten grössten Kreise bezeichnen kann, so repräsentiert

$$\alpha - k\beta = 0$$

ACB.

Wenn umgekehrt zwei entsprechende
schen Systems von einander um 90^0 ent
von ihnen gleich entfernt von den beide
Systems.

Endlich mag hier erwähnt sein, da
Coordinaten irgend eines Punktes der Ku

$$xx' + yy' + zz' =$$

den grössten Kreis darstellt, der jenen Pu
sie die Gleichung der durch das Centrum
zur geraden Verbindungslinie jenes Punkte

222. Nach dem Vorigen können wir d
angewendete Methode*) direct auf sphärisc

---

*) Vergl. „Analyt. Geom. d. Kegelschnitt

len von den
eiten sich in
en Ecken des
nkt gehen —

gehenden Hal-

0
eiecks, in denen
e der beiden an-
nigen Punkte der
seiner Seite ent-

x, y, z hete

$$a\alpha + b\beta +$$

dargestellten grössten
sprechenden Form

$$aa' + bb' + cc' - (bc' + b'$$

In analoger Weise

gebenen Punkt gehend

a

normalen Bogens, inde
linke Seite dieser Glei
durch die Quadratwurz

$$a^2 + b^2 + c^2 -$$

dividiert. (Vergl. a. a.

224. Den vorigen
die dreiseitige Ecke sch
zweiten Grades eine s

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0, \quad a'\alpha +$$

dargestellten grössten Kreise in der ganz d
sprechenden Form

$$aa' + bb' + cc' - (bc' + b'c)\cos A - (ca' + c'a)\,\mathrm{co}$$

In analoger Weise findet man den sin
gebenen Punkt gehenden und zu dem Bog

$$a\alpha + b\beta + c\gamma =$$

normalen Bogens, indem man die Coordina
linke Seite dieser Gleichung einsetzt und
durch die Quadratwurzel von

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2bc\cos A - 2ca$$

dividiert. (Vergl. a. a. O. Artikel 64, Au

224. Den vorigen Zurückweisungen au
die dreiseitige Ecke schliessen wir im Ueb
zweiten Grades eine solche an auf die E

leichung eines

Gleichung sagt
er Normalen,
sphärischen
bogen gefällt
on demselben
lten Normale

einem Punkte
ei Gegenseiten
gefällten Nor-

duct der cosinus sein
ner Spitze ein sphäris
ten Kreise zu seinen
Endpunkten der gege

Die Form der G
schen Bogen sphä
ten der ebenen K

Aus jeder Ei
schnitts ergiebt s
tung des sphärisc
ciprocalkegel des
ward im Artikel 141
Kegels zu den Focallin
wir daher die Pu
Kegels die Kuge
sphärischen Keg
aus der in diesem

ner Spitze ein sphärischer Kegelschnitt, w
ten Kreise zu seinen cyclischen Bogen h
Endpunkten der gegebenen Basis zusamm

Die Form der Gleichung zeigt übere
schen Bogen sphärischer Kegelsch
ten der ebenen Kegelschnitte ents

Aus jeder Eigenschaft eines
schnitts ergiebt sich eine andere
tung des sphärischen Kegelschnit
ciprocalkegel des gegebenen Keg
ward im Artikel 141 bewiesen, dass die
Kegels zu den Focallinien des Reciprocalke
wir daher die Punkte, in denen
Kegels die Kugel schneiden, di
sphärischen Kegelschnitts nenne
aus der in diesem Artikel bewiese

andere, dass das Product der sinus der Normalen, die von den beiden Brennpunkten auf irgend eine Tangente eines sphärischen Kegelschnitts gefällt werden, von constantem Werthe ist.

226. Wenn irgend ein grösster Kreis einen sphärischen Kegelschnitt in den Punkten P, Q und die cyclischen Bogen desselben in den Punkten A, B schneidet, so ist

$$AP = BQ.$$

Diese Eigenschaft sphärischer Kegelschnitte ergiebt sich auf demselben Wege aus dem im letzten Artikel Bewiesenen, wie die entsprechende Eigenschaft der ebenen Hyperbel bewiesen ist. (Vergl. a. a. O. Artikel 199.) Das Verhältniss der sinus der von P und Q auf

$$\alpha = 0$$

gefällten Normalen ist dem Verhältniss der sinus der Normalen gleich, welche von Q und P auf

$$\beta = 0$$

gefällt werden; und da jene ersteren Normalen in dem Verhältniss

$$\sin AP : \sin AQ$$

zu einander stehen, so ist

$$\sin AP : \sin AQ = \sin BQ : \sin BP,$$

woraus leicht die Gleichheit

$$AP = BQ$$

erkannt wird.

Es entspricht dieser Eigenschaft ferner die reciproke, dass die zwei von irgend einem Punkte an einen sphärischen Kegelschnitt gezogenen Tangenten mit denjenigen Bogen gleiche Winkel einschliessen, welche diesen Punkt mit den beiden Brennpunkten desselben verbinden.

227. Es ist ein specieller Fall des im Artikel 218 gegebenen Theorems, dass der zwischen den beiden cyclischen Bogen eines sphärischen Kegelschnitts liegende Theil einer Tangente desselben von der Berührungssehne halbiert wird.

Man kann diesen Satz auch mittelst der Methode des Unendlichkleinen aus dem des Artikel 225 entwickeln, oder ihn endlich direct aus der Form der Gleichung der Tangente

gente durch die cyclischen Bogen bestim
rührungspunkte halbiert wird, kann durch
endlichkleinen (vergl. a. a. O. Kapitel XIII)
dass jede Tangente eines sphärisc
mit den cyclischen Bogen ein Dreie
Inhalt bildet, oder ein Dreieck, für
der Basiswinkel unveränderlich ist.
Wahrheit trigonometrisch daraus, dass das
auf die cyclischen Bogen gefällten Normale
wenn wir den Abschnitt der Tangente c un
cyclischen Bogen gebildeten Winkel A und
sinus der Normalen auf α und β respective

$$\sin \tfrac{1}{2} c \sin A, \quad \sin \tfrac{1}{2} c \s$$

und für das Dreieck von der Basis c und
keln A und B giebt die sphärische Trigon

der zwei gege-

dass ein sphärischer
rbel betrachtet wer-
el in zwei diametral
von ihnen als Brenn-
on den geschlossenen
l bestimmt, so ist die
aber für eine der Fo-
ngesetzten Punkt be-

veränderliche Tangente
n Differenz constant ist,
tikels betrachteten Win-

das Quadrat der Ent
Durchschnitt von

ausgedrückt, und wir
Entfernung in einem
von der Durchschnitts

ist. Diese Linie ist
Punkt (α', α'') als Bre

Wir erkennen so
Kegels, welcher die L

$$x^2 +$$

ist; und folgern darau
nung eines Punkte
vom Brennpunkte
selben Punktes vo
in constantem Verh

Salmon, Anal. Geom. d. Ra

Durchschnitt von

$$\alpha' = 0, \quad \alpha'' = 0$$

ausgedrückt, und wir sehen, dass diese En
Entfernung in einem constanten Verhältnis
von der Durchschnittslinie derselben Eben

$$\beta - \alpha \cos a = 0$$

ist. Diese Linie ist daher die Directrix
Punkt (α', α'') als Brennpunkt.

Wir erkennen so auch, dass die allge
Kegels, welcher die Linie xy zur Focallin

$$x^2 + y^2 = (ax + by +$$

ist; und folgern daraus sodann, dass de
nung eines Punktes eines sphäris
vom Brennpunkte zu dem sinus de
selben Punktes von einem gewisse
in constantem Verhältniss ist.

230. Irgend zwei veränderliche Tangenten schneiden die cyclischen Bogen in vier Punkten, welche in einem Kreise liegen.

Denn wenn die Gleichungen

$$L = 0, \quad M = 0, \quad R = 0$$

zwei Tangenten und ihre Berührungssehne repräsentieren, so ist

$$LM = R^2$$

die Gleichung des sphärischen Kegelschnitts. Da sie aber mit

$$\alpha\beta = x^2 + y^2 + z^2$$

identisch sein muss, so ist

$$\alpha\beta - LM$$

mit

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2$$

identisch; und während die letztere Grösse, gleich Null gesetzt, einen kleinen Kreis darstellt, welcher mit der Berührungssehne R denselben Pol hat, so zeigt die Form

$$\alpha\beta - LM = 0,$$

dass dieser Kreis dem Vierseit $\alpha\beta LM$ umschrieben ist.

Die Reciprocität ergiebt, dass die Focalstrahlen zweier Punkte eines sphärischen Kegelschnitts ein sphärisches Viereck bilden, welches einem kleinen Kugelkreis umgeschrieben ist.

Aus dieser Eigenschaft kann dann mittelst der Bemerkung, dass die Summe oder Differenz zweier Gegenseiten in einem solchen Viereck der Summe oder Differenz der beiden andern Gegenseiten desselben gleich ist, der Satz abgeleitet werden, dass die Summe oder Differenz der Brennpunktsdistanzen für die Punkte einer sphärischen Ellipse constant ist.

231. Aus den soeben für Kegel bewiesenen Eigenschaften können ferner Eigenschaften abgeleitet werden, welche allen Flächen zweiten Grades angehören. Z. B.:

Das Product der sinus der Winkel, die eine Erzeugende eines Hyperboloids mit den Ebenen der Kreisschnitte bildet, ist constant.

Denn unter den Erzeugenden des Asymptotenkegels ist eine zu der betrachteten Erzeugenden des Hyperboloids parallel und die Kreisschnitte dieses Kegels sind dieselben wie die des Hyperboloids.

Für irgend einen Halbdurchmesser a, mit OC den Winkel α einschliesst, gilt da die Relation

$$\frac{1}{a'^2} = \frac{\cos^2 \alpha}{c^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{a^2}.$$

Nun ist der Halbdurchmesser a' off nigen Schnittes, welcher durch ihn norm gelegt wird, und α ist, so lange $a' > b$ der Winkel BOA' und $B'OA'$, welche d mit den cyclischen Ebenen bildet; es is weil alsdann OA' zwischen den Linien O die halbe Differenz derselben Winkel. U Differenz ist für alle Schnitte von derselb daher a', b' die Achsen eines Centralschn kel, welche er mit den cyclischen Eben ben wir

tte diesel-
en, welche
von ihnen
neigt gegen
n; und es ist
. a. O. Artikel
wei Tangen-
spunkten ge-
tts constant.
on dem, welches
als solches ist es

nitts von zwei
Tangenten eines

früher erwähnten Mé-

Es entspricht die
Enveloppe einer S
Kegelschnitt ein n
focaler sphärische

234. Man soll d
len finden, welche
rischen Kegelschn
werden.

Die Methode zur Be
wie sie bei der entsprec
trie der Ebene angewend
in der Interpretation des
Wenn die Gleichung
tikel 229 in der Form

$$x^2 + y^2 =$$

geschrieben wird, so ist

x

Enveloppe einer Sehne von 90° in
Kegelschnitt ein mit dem Reciprok
focaler sphärischer Kegelschnitt is

234. Man soll den Ort der Fussp
len finden, welche von dem Brenn
rischen Kegelschnitts auf seine
werden.

Die Methode zur Beantwortung dieser
wie sie bei der entsprechenden Aufgabe de
trie der Ebene angewendet wird und die Ve
in der Interpretation des Resultats hervor.

Wenn die Gleichung des sphärischen
tikel 229 in der Form

$$x^2 + y^2 = t^2, \quad (t = ax + b$$

geschrieben wird, so ist die Gleichung der

$$xx' + yy' = tt'$$

durch A, B, C die
e sinus α, β, γ der
en Normalen durch
Transformation der

$$2\alpha\beta \sin A \sin B \cos c$$
$$l \cos B \cos C.$$

g eine zwischen den

Normalen erhalten
auf die durch
0

wir nur die rechte
ieren und erkennen,
rmation der elemen-

so gilt die Identität

$$L\alpha + M\beta +$$

wir können mit Hilfe
folgender Weise schie

$$l = \cos^2 \tfrac{1}{2}(bc)$$
$$p = \cos^2 \tfrac{1}{2}(ad)$$

wo (ad), etc. die Wi

α

mit einander einschlies
benen Kugel

$$\begin{aligned} & lrq\alpha^2 + mpr\beta^2 \\ & + (lp - mq - nr) \\ & + (nr - lp - mq) \end{aligned}$$

*) Man kann die a
geschriebenen Flächen

$$L\alpha + M\beta + N\gamma + P\delta = r\ (L$$

wir können mit Hilfe derselben r eliminie
folgender Weise schicklich schreiben:

$$l = \cos^2 \tfrac{1}{2}(bc), \quad m = \cos^2 \tfrac{1}{2}(ca),$$
$$p = \cos^2 \tfrac{1}{2}(ad), \quad q = \cos^2 \tfrac{1}{2}(bd),$$

wo (ad), etc. die Winkel bezeichnen, wel

$$\alpha = 0, \quad \delta = 0,$$

mit einander einschliessen. Dann ist die G
benen Kugel

$$lrq\alpha^2 + mpr\beta^2 + nqp\gamma^2 + lmn\delta^2$$
$$+ (lp - mq - nr)(\alpha\delta + p\beta\gamma) + (mq -$$
$$+ (nr - lp - mq)(n\gamma\delta + r\alpha\beta) = 0^*$$

---

*) Man kann die allgemeine Gleichung
geschriebenen Flächen zweiten Grades in di

cher

n

$an^2 \varrho'$,

$an^2 \varrho$,

Kreise in einer

hen zwei Kreisen

sechs unbestimmte

t. (Vergl. „Analyt.

Ihr entspricht für
benen Kreis eines sph

$$\sec^2 R \sec^2 r$$

Wir könnten in
schriebenen und umge
gons bestehende Relati

238. Nach Artikel
kreises oder eines ger
wendig von der Form

$$\alpha^2 \sin^2 A + \beta^2 si$$
$$+ 2\beta\gamma \sin B \sin C \cos$$
$$= (l\alpha + m\beta + n\gamma)^2$$

Wenn nun der be
taldreieck $\alpha\beta\gamma$ umg
ten von α^2, β^2, γ^2 vers

$$l\alpha + m\beta + n$$

in der Ebene als eine Function ihrer Halbmesser und ihrer Centraldistanz ausgedrückt ist, so wird die entsprechende Relation für zwei Kreise einer Kugel aus ihr erhalten, indem man für

r, r', D die Werthe $\tan r$, $\tan r'$, $\sec r \sec r' \sin D$

einsetzt.

So berühren sich zwei Kreise in einer Ebene, wenn die Discriminante der obigen cubischen Gleichung verschwindet und die Bedingung der Berührung ist daher

$$\text{entweder } D = 0 \text{ oder } D = r \pm r'.$$

Die der letzteren Bedingung entsprechende Relation für Kugelkreise ist daher

$$\tan r \pm \tan r' = \sec r \sec r' \sin D$$

oder

$$\sin D = \sin (r \pm r').$$

Wenn ferner zwei Kreise in einer Ebene dem nämlichen Dreieck respective eingeschrieben und umgeschrieben sind, so besteht die Invarianten-Gleichung

$$\Theta^2 = 4 \Delta \Theta_1$$

und es entspringt aus ihr zwischen den Halbmessern und der Centraldistanz beider Kreise die Relation

$$D^2 = R^2 - 2Rr.$$

Ihr entspricht für den eingeschriebenen und den umgeschriebenen Kreis eines sphärischen Dreiecks die Relation

$$\sec^2 R \sec^2 r \sin^2 D = \tan^2 R - 2 \tan R \tan r.$$

Wir könnten in derselben Weise die zwischen dem eingeschriebenen und umgeschriebenen Kreise eines sphärischen Polygons bestehende Relation entwickeln.

238. Nach Artikel 235 ist die Gleichung eines kleinen Kugelkreises oder eines geraden Kegels in Dreilinien-Coordinaten nothwendig von der Form

$$\begin{aligned} &\alpha^2 \sin^2 A + \beta^2 \sin^2 B + \gamma^2 \sin^2 C \\ &+ 2\beta\gamma \sin B \sin C \cos a + 2\gamma\alpha \sin C \sin A \cos b + 2\alpha\beta \sin A \sin B \cos c \\ &= (l\alpha + m\beta + n\gamma)^2. \end{aligned}$$

Wenn nun der betrachtete Kugelkreis dem Fundamentaldreieck $\alpha\beta\gamma$ umgeschrieben ist, so müssen die Coefficienten von α^2, β^2, γ^2 verschwinden und wir müssen daher

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = \alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C$$

reise sind da-

$\xi\eta \cos C$

en erhalten wir

$C = 0$

$\sqrt{v} = 0$

wird sie auf

$2xy \cos c$

Radius des umges

Diesen Satz oder

kann man wie folgt e
linien eines beliebige
Dreiecks durch eine F
Ecken des Dreiecks
$\varrho, \varrho', \varrho''$ sind, so erh

$\varrho +$

für die Entfernungen
ses aus dieser Relatio
mung von R, deren W
die gegebenen alle inn
des innerlich berühren
lich eingeschriebenen

Diesen Satz oder die Relation

$$\tan \varrho = \tfrac{1}{2} \tan R$$

kann man wie folgt erhalten. Bekanntlich
linien eines beliebigen Punktes der Kuge
Dreiecks durch eine Relation mit einander
Ecken des Dreiecks Centra von Kreisen
ϱ, ϱ', ϱ'' sind, so erhält man durch Subs

$$\varrho + R, \quad \varrho' + R, \quad \varrho''$$

für die Entfernungen des Centrums des sie
ses aus dieser Relation eine quadratische
mung von R, deren Wurzeln die Radien
die gegebenen alle innerlich oder äusserlich
des innerlich berührenden Kreises für die d
lich eingeschriebenen Kreise wird so durc

$$\tan \varrho = \tfrac{1}{2} \tan R$$

$\ln (s - a)$

andern Kreise,
hervor durch
; und man er-
ünften berührt

$- 2xy \cos c$

$\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \Big)^2 \Big\}$

$\cos \frac{1}{2} c$

ung der von ihm
n Durchschnitts-
$: y$ die Gleichung

$- \cos^2 \frac{1}{2} c)$

ecks. Man findet sie,
Linie zieht, welche mit
selben Winkel macht, w
ses in diesem Punkte

Indem man dann

$\alpha \cos (S - A) + \beta$

schreibt, erkennt man
schen Kreises in der
schriebenen Kreises mit

$\alpha \cos A +$

enthalten ist, der für d
Fusspunkten der Höhen
der Homologie ist.

Eine andere Constr
folgenden Betrachtungen.

Die Verbindungslinie

Linie zieht, welche mit den in ihr zusammen
selben Winkel macht, wie die Tangente des u
ses in diesem Punkte mit denselben Seiten.

Indem man dann die Gleichung der Po

$$\alpha \cos (S - A) + \beta \cos (S - B) + \gamma c$$

schreibt, erkennt man, dass das Centrum
schen Kreises in der Verbindungslinie des
schriebenen Kreises mit dem Pole des gröss

$$\alpha \cos A + \beta \cos B + \gamma \cos$$

enthalten ist, der für das ursprüngliche Drei
Fusspunkten der Höhenperpendikel gebildet
der Homologie ist.

Eine andere Construction dieses Centru
folgenden Betrachtungen.

Die Verbindungslinien der Ecken des D

pendikel und erhält
gslinie von derjeni-
der Höhenperpen-
gslinien verbindet*).

er die Eigenschaften
rechen, welche mit
ihrung haben, zeigt,
erdurch bewiesen ist:
Kegelschnitte be-
egebenen Kegel-
se werden sämmt-
ihrt, der gleich-
hrung hat.

Bemerkte Druckfehler.

Seite 63 Zeile 11 v. u. Kanten statt Seiten.
- — - 1 v. u. Bd. LXII statt Bd. XLII.
- 134 - 15 v. o. und dem statt und in dem.
- 137 - 19 v. o. fehlt das Wort: Beispiel.
- 188 - 8 v. o. ; statt ,.
- 206 - 3 v. o. welchen statt welcher.
- 206 - 2 v. u. cz^2 statt z^2.
- 269 - 10 v. u. umgeschrieben statt umschrieben.
- 281 - 6 v. o. schalte ein nach 170, 130 und 186.
- 294 - 6 v. o. $\frac{z^2}{a_3 + l}$ statt $\frac{z^2}{a^3 - l}$.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Salmon, George, / Fiedler, Wilhelm / Kommerell, Karl,

Analytische Geometrie des Raumes

Bd.: I

Leipzig 1863

Math.p. 490 sc-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082703-0